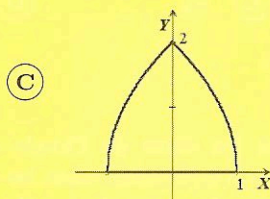
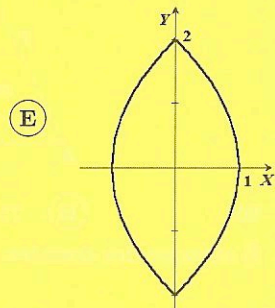
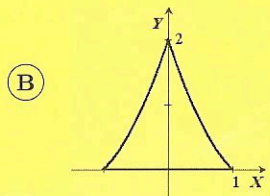
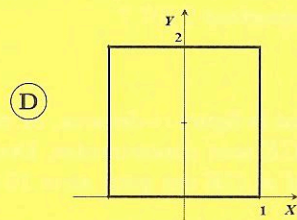
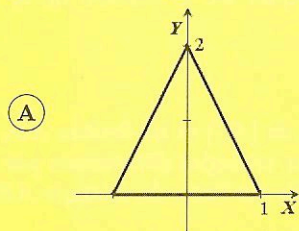


26. *Sans réponse préformulée* — On a interrogé 100 élèves à la sortie de leur école : 78 possèdent une TV, 88 une radio et 70 un enregistreur. Combien d'entre eux, au minimum, ont les trois appareils ?

27. Dans le plan d'axes (Ox, Oy) , on considère le carré $ABCD$ tel que $A = (0, 0)$, $B = (1, 0)$, $C = (1, 1)$ et $D = (0, 1)$. On effectue la transformation $(x, y) \mapsto (X, Y)$ avec $\begin{cases} X = x^2 - y^2 \\ Y = 2xy \end{cases}$

Quelle est l'image du carré dans le plan d'axes (OX, OY) ?



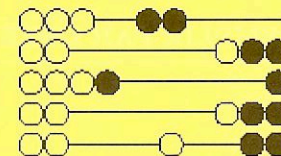
28. *Sans réponse préformulée* — Un trapèze isocèle est circonscrit à un cercle de rayon 6 cm. Sachant que la grande base mesure 10 cm de plus que la petite base, quel est, en centimètres, le périmètre de ce trapèze ?

29. *Sans réponse préformulée* — Un point intérieur à un rectangle est à une distance de 22 cm d'un des sommets et à une distance de 24 cm du sommet opposé. Sa distance à un troisième sommet est 6 cm. Quelle est, en centimètres, sa distance au quatrième sommet ?

30. *Sans réponse préformulée* — Neuf points sont les sommets, les milieux des côtés et le centre d'un carré. Combien d'ensembles de quatre de ces points ne contiennent pas trois points colinéaires ?



OLYMPIADE
MATHÉMATIQUE BELGE



Trente-deuxième Olympiade Mathématique Belge

organisée par la

*Société Belge des Professeurs de Mathématique
d'expression française*

Maxi demi-finale 2007

INSTRUCTIONS

- N'ouvrez pas ce livret avant le signal de votre professeur.
- Vous indiquerez vos réponses au verso de cette page.
- Ce questionnaire contient 30 questions ; répondez à 5 questions au moins.
- Dix-huit questions sont à choix multiple. Chacune est suivie de réponses désignées par (A), (B), (C), (D) et (E). Chaque question possède une seule réponse correcte. Décidez quelle est la réponse correcte parmi les cinq proposées et retenir la lettre majuscule correspondante. Sur la feuille réponse, écrivez cette lettre dans le cercle situé à droite du numéro de la question.
EXEMPLE : si vous estimez que la réponse correcte à la question numéro 17 est celle précédée de la lettre (D), vous écrirez D sur la feuille réponse, à droite du numéro 17, dans le cercle.
- Douze questions sont sans réponses préformulées. Dans ce cas, la réponse correcte est un nombre entier dans $[0; 999]$. C'est ce nombre que vous écrirez dans la case rectangulaire de la feuille réponse.
- RÈGLES DE COTATION : Vous recevez 5 points par réponse correcte, 2 points par abstention et 0 point par réponse fausse. Avec ce système, deviner fera en moyenne diminuer votre score. Vous n'avez intérêt à deviner que si vous avez au moins une chance sur deux de bien choisir.
- Reportez les réponses au fur et à mesure que vous les obtenez. Écrivez au crayon (si vous changez d'avis, gomez la réponse). Du papier de brouillon, du papier millimétré, une règle, un compas, une gomme peuvent être utilisés. Les calculatrices et règles à calcul ne sont pas autorisées, de même que les livres et les notes personnelles.
- Au signal de votre professeur, détachez la feuille de couverture sans déchirer le questionnaire, retournez-la, couvrez-en les questions, puis inscrivez les informations demandées.
- Quand votre professeur vous l'indiquera, commencez le travail sur les problèmes. Vous disposez de 90 minutes.

Mercredi 7 mars 2007

À REMPLIR PAR L'ÉLÈVE (en majuscules)

Nom :

Prénom :

Classe :

Adresse privée

Rue et n° :

Code postal et localité :

École

Nom (sans abréviations) :

Adresse

Rue et n° :

Code postal et localité :

CADRE RÉSERVÉ AU PROFESSEUR

Chaque réponse correcte a une valeur de 5 points et chaque abstention a une valeur de 2 points ; rien n'est déduit pour une réponse fausse. Le score total est calculé en prenant 5 fois le nombre de réponses correctes et en ajoutant 2 fois le nombre d'abstentions.

Réponses correctes : × 5 =

+

Abstentions : × 2 =

Score total :

1

2

3

4

5

6

7

8

9

10

11

12

13

14

15

16

17

18

19

20

21

22

23

24

25

26

27

28

29

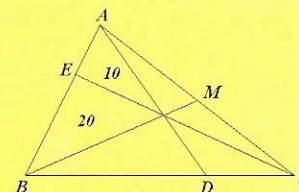
30

22. Sans réponse préformulée — Les nombres naturels non nuls sont écrits en tableau de la manière suivante :

1					
2	3				
4	5	6			
7	8	9	10		
11	12	13	14	15	
16	17	18	19	20	21
22	23

La ligne n° 6 comporte le nombre 19. Quel est le numéro de la ligne comportant 2007 ?

23. Dans la figure ci-dessous, M est le milieu de $[AC]$ et les droites AD , BM et CE sont concourantes. Deux des petits triangles déterminés par AD , BM et CE ont pour aires 10 et 20. Quelle est l'aire du triangle ABC ?

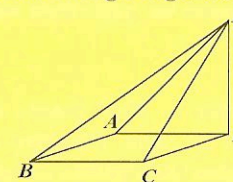


- (A) 60 (B) 75 (C) 85 (D) 90
 (E) Il manque des données.

24. L'aire d'un triangle rectangle isocèle dont les côtés de l'angle droit mesurent 1 cm vaut X cm². L'aire d'un triangle équilatéral dont les côtés mesurent 1 cm vaut Y cm². L'aire d'un triangle rectangle isocèle dont l'hypoténuse mesure 1 cm vaut Z cm². Une seule des relations ci-dessous est correcte, laquelle ?

- (A) $X < Y < Z$ (B) $Z < X < Y$ (C) $Y < Z < X$
 (D) $X < Z < Y$ (E) $Z < Y < X$

25. Sans réponse préformulée — Dans la pyramide $ABCDE$, $ABCD$ est un carré, DE est perpendiculaire au plan de ce carré et $|DE| = |AD|$. Quelle est, en degrés, l'amplitude de l'angle aigu des plans BEC et EAB ?



17. Deux des racines du polynôme $x^3 + bx^2 + cx + d$ sont 3 et 5. Laquelle des expressions suivantes donne toujours une autre racine ?

- (A) $\frac{b}{8}$ (B) $\frac{b}{15}$ (C) $-8 - b$ (D) $8 + b$
 (E) Aucune de ces expressions.

18. Le graphique de la fonction $f : x \mapsto \frac{x^2 + x - 1}{x^2 - 1}$ admet

- (A) l'origine comme centre de symétrie ;
 (B) l'axe des ordonnées comme axe de symétrie ;
 (C) l'axe des abscisses comme axe de symétrie ;
 (D) le point $A = (0, 1)$ comme centre de symétrie ;
 (E) la droite d'équation $x = -\frac{1}{2}$ comme axe de symétrie.

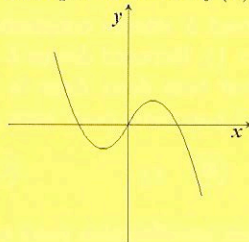
19. Un vase cylindrique de hauteur H est rempli à moitié d'eau. Dans le fond du vase, on pose une bougie cylindrique dont le diamètre vaut la moitié de celui de la base du vase et dont la hauteur est double de celle du vase. À quelle hauteur va se situer le nouveau niveau de l'eau ?

- (A) $\frac{2}{3}H$ (B) $\frac{3}{4}H$ (C) $\frac{4}{5}H$ (D) H
 (E) Le vase va déborder.

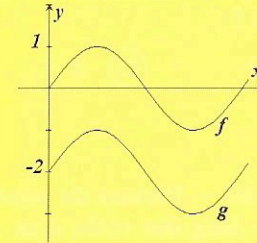
20. Une balle lâchée verticalement à 1 m du sol rebondit au tiers de cette hauteur, puis à nouveau au tiers de la hauteur qu'elle vient d'atteindre et ainsi de suite. Après combien de rebonds aura-t-elle parcouru au moins 2 m ?

- (A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 9 (E) Jamais.

21. *Sans réponse préformulée* — Le graphe représenté ci-dessous est celui de la dérivée f' d'une fonction f . Il est défini pour tout réel, est symétrique par rapport à l'origine des axes et ne coupe l'axe des x qu'en trois points. Combien de réels a sont tels que $\forall x \in \mathbf{R} : f(a) \geq f(x)$?

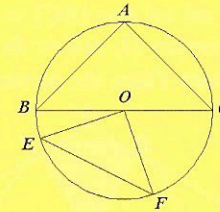


1. Voici les graphiques de deux fonctions f et g . Le graphique de g a été obtenu par translation à partir de celui de f . Comment s'exprime la fonction g ?



- (A) $x \mapsto y = f(x + 2)$ (D) $x \mapsto y = f(x) - 2$
 (B) $x \mapsto y = f(x) + 2$ (E) $x \mapsto y = 2f(x)$
 (C) $x \mapsto y = f(x - 2)$

2. Dans le cercle de centre O , le triangle isocèle BAC est rectangle en A et le triangle EOF est rectangle en O . Quel est le rapport de l'aire de BAC à celle de EOF ?



- (A) $\sqrt{2} - 1$ (B) 1,5 (C) $\sqrt{2}$ (D) 2 (E) $\sqrt{2} + 1$

3. *Sans réponse préformulée* — Quel est le plus petit naturel qui, divisé par 6, donne un reste égal à 1, et, divisé par 11, donne un reste égal à 6 ?

4. Pour tous réels non nuls a, b , on a $a * b = b^{-a}$. Que vaut $(1 * 3) * 8$?

- (A) 1 (B) $-\frac{1}{2}$ (C) 2 (D) $\frac{1}{2}$ (E) -2

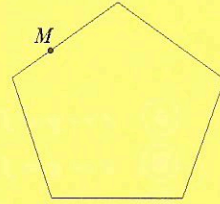
5. Le baril de pétrole coûtait 60 dollars il y a un mois. Depuis, ce prix a augmenté de 20 % alors que la valeur du dollar a chuté de 20 % par rapport à l'euro. Pendant le mois dernier, le prix en euros du baril

- (A) a baissé de 40 % ;
 (B) a baissé de 4 % ;
 (C) est inchangé ;
 (D) a augmenté de 4 % ;
 (E) a augmenté de 44 %.

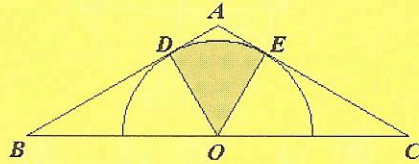
6. Quel est le plus petit nombre de couleurs nécessaires pour colorier les arêtes d'un cube de sorte que chaque arête soit entièrement peinte dans une de ces couleurs et que les arêtes issues d'un même sommet reçoivent des couleurs différentes ?

- (A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 12

7. *Sans réponse préformulée* — Partant du point M , une mouche avance le long des côtés d'un pentagone régulier jusqu'à revenir exactement à son point de départ. À chaque sommet, elle tourne au plus court pour passer d'un côté au suivant. À la fin de son périple, quelle est, en degrés, la somme des amplitudes des angles des rotations qu'elle a effectuées ?



8. Le triangle isocèle ABC est tel que $|BC| = 12$, $|AB| = |AC|$ et $\widehat{BAC} = 120^\circ$. Le demi-cercle de centre O , milieu de $[BC]$, est tangent à AB en D et à AC en E . Que vaut l'aire du secteur circulaire d'angle \widehat{DOE} ?



- (A) $\frac{9\pi}{4}$ (B) 2π (C) $\frac{3\pi}{2}$ (D) $\frac{2\pi}{3}$ (E) $\pi\sqrt{3}$

9. *Sans réponse préformulée* — Parmi les propositions suivantes, combien sont correctes ?

$$\forall x, y \in \mathbf{R} : x \cdot y = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } y = 0$$

$$\forall x, y \in \mathbf{R} : x \cdot y = 0 \Leftarrow x = 0$$

$$\forall x, y \in \mathbf{R} : x \cdot y = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$\forall x, y \in \mathbf{R} : x \cdot y = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ et } y = 0$$

$$\forall x, y \in \mathbf{R} : x \cdot y = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ et } y = 0$$

10. *Sans réponse préformulée* — Une feuille de papier rectangulaire a un périmètre de 108 cm. Je la plie en deux dans un sens, en quatre dans l'autre et j'obtiens ainsi un carré. Quel est, en centimètres, le périmètre de ce carré ?

11. La bande de papier représentée ci-dessous est incurvée dans l'espace de sorte que le point t se confonde avec le point s et le point u avec le point r , le segment $[t, u]$ s'appliquant sur le segment $[s, r]$. Cette opération s'effectue sans déchirure ni autre superposition de points.



La surface obtenue

- (A) a deux faces ; (D) enferme une région de l'espace ;
 (B) contient une droite ; (E) n'admet aucune des propriétés précédentes.
 (C) a un seul bord ;

12. Le triangle isocèle ABC est tel que $|AB| = |AC|$ et $|BC| = \sqrt{2}$. Les médianes issues de B et de C sont perpendiculaires. Que vaut l'aire du triangle ABC ?

- (A) 1,5 (B) 2 (C) 2,5 (D) 3 (E) 3,5

13. *Sans réponse préformulée* — Une salle de bal de plan rectangulaire mesure 30 m sur 90 m. Un danseur tourne sur lui-même et examine la salle en regardant horizontalement. De combien de points de cette salle peut-il voir chacun des deux petits côtés de la salle sous le même angle de 46° ?

14. On sait que $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot n$. Pour tout entier n supérieur à 2007, le nombre de nombres premiers strictement supérieurs à $(n! + 1)$ et strictement inférieurs à $(n! + n)$ vaut

- (A) 0 (B) 1 (C) $\frac{n}{2}$ (D) $n - 2$ (E) n^2

15. Deux polygones convexes P et Q ont respectivement 2007 et 2008 côtés. Leurs côtés n'ont aucun segment en commun. Quel est le nombre maximal de points où les côtés de P et de Q se coupent ?

- (A) 2×2007 (D) 2007×2008
 (B) 2×2008 (E) $2 \times 2007 - 2008$
 (C) $2007 + 2008$

16. Alex et Bernard courent à vitesse constante, mais Bernard court x fois plus vite qu'Alex ($x > 1$). Bernard donne à Alex une avance de y mètres. Au signal, ils s'élancent tous deux dans la même direction. Combien de mètres Bernard doit-il parcourir pour rattraper Alex ?

- (A) $\frac{xy}{x-1}$ (B) xy (C) $\frac{y}{x-1}$ (D) $\frac{1}{xy}$
 (E) Les données sont insuffisantes pour le dire.