

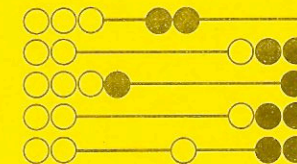
29. Les côtés parallèles $[AB]$ et $[DC]$ du trapèze $ABCD$ mesurent respectivement 2 et 4. Le milieu du côté $[AD]$ est M et le milieu du côté $[BC]$ est N . Les droites AN et BM se coupent en P , les droites CM et DN se coupent en Q . Que vaut le rapport de l'aire du quadrilatère $MPNQ$ à celle du trapèze $ABCD$?

- (A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{9}{35}$ (C) $\frac{5}{18}$ (D) $\frac{3}{7}$
 (E) Les données sont insuffisantes pour répondre.

30. *Sans réponse préformulée* — Quel est le nombre de solutions de l'équation $\frac{\sin x}{x} = 0,005$ d'inconnue x réelle ?



**OLYMPIADE
MATHÉMATIQUE BELGE**



Trente-quatrième Olympiade Mathématique Belge

organisée par la

*Société Belge des Professeurs de Mathématique
d'expression française*

Maxi demi-finale 2009

INSTRUCTIONS

- N'ouvrez pas ce livret avant le signal de votre professeur.
- Vous indiquerez vos réponses au verso de cette page.
- Ce questionnaire contient 30 questions ; répondez à 5 questions au moins.
- Dix-huit questions sont à choix multiple. Chacune est suivie de réponses désignées par (A), (B), (C), (D) et (E). Chaque question possède une seule réponse correcte. Décidez quelle est la réponse correcte parmi les cinq proposées et reprenez la lettre majuscule correspondante. Sur la feuille réponse, écrivez cette lettre dans le cercle situé à droite du numéro de la question.
EXEMPLE : si vous estimez que la réponse correcte à la question numéro 17 est celle précédée de la lettre (D), vous écrirez D sur la feuille réponse, à droite du numéro 17, dans le cercle.
- Douze questions sont sans réponses préformulées. Dans ce cas, la réponse correcte est un nombre entier dans $[0; 999]$. C'est ce nombre que vous écrirez dans la case rectangulaire de la feuille réponse.
- RÈGLES DE COTATION : Vous recevez 5 points par réponse correcte, 2 points par abstention et 0 point par réponse fautive. Avec ce système, deviner fera en moyenne diminuer votre score. Vous n'avez intérêt à deviner que si vous avez au moins une chance sur deux de bien choisir.
- Reportez les réponses au fur et à mesure que vous les obtenez. Écrivez au crayon (si vous changez d'avis, gomez la réponse). Du papier de brouillon, du papier millimétré, une règle, un compas, une gomme peuvent être utilisés. Les calculatrices et règles à calcul ne sont pas autorisées, de même que les livres et les notes personnelles.
- Au signal de votre professeur, détachez la feuille de couverture sans déchirer le questionnaire, retournez-la, couvrez-en les questions, puis inscrivez les informations demandées.
- Quand votre professeur vous l'indiquera, commencez le travail sur les problèmes. Vous disposez de 90 minutes.

Mercredi 11 mars 2009

Les participants sélectionnés pour la finale recevront par l'intermédiaire de leur école une fiche qu'ils devront compléter. Le jour de la finale, ils se muniront de cette fiche ainsi que de leur carte d'identité.

À REMPLIR PAR L'ÉLÈVE (en majuscules)

Nom :

Prénom :

Classe :

Adresse privée

Rue et n° :

Code postal et localité :

École

Nom (sans abréviations) :

Adresse

Rue et n° :

Code postal et localité :

CADRE RÉSERVÉ AU PROFESSEUR

Chaque réponse correcte a une valeur de 5 points et chaque abstention a une valeur de 2 points ; rien n'est déduit pour une réponse fausse. Le score total est calculé en prenant 5 fois le nombre de réponses correctes et en ajoutant 2 fois le nombre d'abstentions.

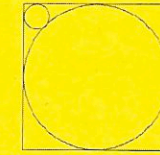
Réponses correctes : $\times 5 =$

Abstentions : $\times 2 =$

Score total :

- 1
- 2
- 3
- 4
- 5
- 6
- 7
- 8
- 9
- 10
- 11
- 12
- 13
- 14
- 15
- 16
- 17
- 18
- 19
- 20
- 21
- 22
- 23
- 24
- 25
- 26
- 27
- 28
- 29
- 30

25. Dans la figure ci-dessous, le grand cercle est inscrit dans le carré, le petit cercle est tangent à deux des côtés du carré et au grand cercle. Que vaut le rapport du rayon du grand cercle à celui du petit cercle ?



- (A) 6 (B) $4\sqrt{2}$ (C) $2\sqrt{5} + 2$ (D) $3 + 2\sqrt{2}$ (E) $\frac{3+\sqrt{2}}{2}$

26. Quel est le nombre de solutions de l'équation

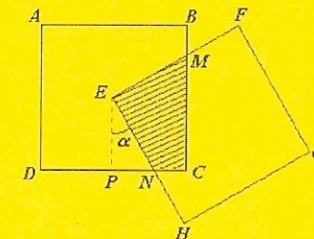
$$|1 + x - |x - |1 - x|| = |-x - |x - 1||$$

où l'inconnue x est réelle ?

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

27. *Sans réponse préformulée* — Les producteurs d'un film ont établi que la recette hebdomadaire (en millions d'euros), t semaines après la sortie en salle, pouvait se calculer grâce à la formule $R(t) = \frac{50t}{36 + t^2}$. Combien de semaines devront-ils attendre pour que cette recette soit maximale ?

28. Le carré $ABCD$ de centre E et le carré $EFGH$ sont isométriques. La droite EP est perpendiculaire à CD et l'angle $\alpha = \widehat{PEN}$ est tel que $0 < \alpha \leq 45^\circ$. Parmi les propositions suivantes, laquelle est vraie ?



- (A) Le périmètre du quadrilatère $EMCN$ ne dépend pas de α .
 (B) Le périmètre de $EMCN$ n'est pas constant et est maximal si $\alpha = 30^\circ$.
 (C) L'aire de $EMCN$ ne dépend pas de α .
 (D) L'aire de $EMCN$ n'est pas constante et est maximale si $\alpha = 45^\circ$.
 (E) Aucune des propositions précédentes n'est vraie.

19. Quel est le nombre de solutions de l'équation $(\sqrt{x})^3 = 3\sqrt{x}$ d'inconnue réelle x ?

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) Une infinité.

20. Dans un repère orthonormé, la droite d'équation $y = 5x$ coupe la parabole d'équation $y = x^2$ en A . La perpendiculaire à OA en O coupe la parabole en B . Que vaut l'aire du triangle AOB ?

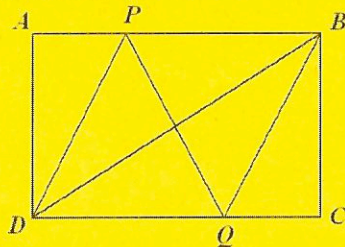
- (A) 1 (B) $\frac{3}{4}$ (C) $\frac{5}{3}$ (D) $\frac{17}{8}$ (E) $\frac{13}{5}$

21. *Sans réponse préformulée* — Soit E l'ensemble des réels x pour lesquels les deux membres de l'égalité

$$\cotg 8x - \cotg 27x = \frac{\sin kx}{\sin 8x \cdot \sin 27x}$$

sont définis. Si cette égalité est vérifiée pour tout x appartenant à E , que vaut k ?

22. La largeur et la longueur du rectangle $ABCD$ mesurent respectivement 3 et $3\sqrt{3}$. La médiatrice de la diagonale $[BD]$ détermine le quadrilatère $DPBQ$. Que vaut l'aire de ce quadrilatère ?



- (A) 9 (B) $9\frac{\sqrt{3}}{2}$ (C) $3 + 3\sqrt{3}$ (D) 10 (E) $6\sqrt{3}$

23. *Sans réponse préformulée* — L'amplitude de chaque angle intérieur d'un polygone régulier est comprise entre 163° et 164° . Combien de côtés possède ce polygone ?

24. La fonction $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ est telle que $f(a \cdot b) = f(a) - f(b)$ pour tous réels a, b . Que vaut $f(2009)$?

- (A) -2009 (B) 0 (C) 2008 (D) 2009
(E) Sa valeur dépend de a et de b .

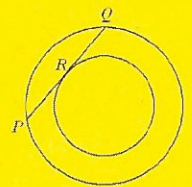
1. Si un certain professeur se trompe au moins une fois, que peut-on en déduire logiquement ?

- (A) Tous les professeurs se trompent toujours.
(B) Celui qui se trompe parfois est un professeur.
(C) Aucun professeur ne dit jamais la vérité.
(D) Il existe au moins une personne qui s'est trompée au moins une fois.
(E) Quiconque ne se trompe jamais est un professeur.

2. Dans un village où vivent 1 600 familles, 3 % d'entre elles possèdent un seul lecteur DVD. Parmi les autres familles, une moitié possède exactement deux lecteurs DVD et l'autre moitié n'en possède aucun. Combien y a-t-il de lecteurs DVD dans ce village ?

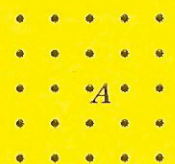
- (A) 824 (B) 1 552 (C) 1 600 (D) 1 648 (E) 3 152

3. *Sans réponse préformulée* — Une piste de course a la forme d'une couronne circulaire. Le grand cercle admet une corde $[PQ]$ de longueur 20 mètres tangente en R au petit cercle. Que vaut, en mètres carrés, l'aire de la piste arrondie à l'unité la plus proche ?



4. *Sans réponse préformulée* — On appelle nombres premiers jumeaux deux nombres premiers dont la différence vaut 2, par exemple 3 et 5, 11 et 13. Combien existe-t-il de paires de nombres premiers jumeaux inférieurs à 100 ?

5. *Sans réponse préformulée* — Le point A est le centre du quadrillage régulier représenté entièrement ci-contre. Quel est le nombre de carrés dont les sommets se trouvent parmi les 25 sommets de ce quadrillage et qui admettent A comme centre de symétrie ?



6. Deux sphères distinctes de rayon r sont sécantes, non tangentées. Dans quel intervalle varie la longueur de leur cercle d'intersection ?

- (A) $]0; 2\pi r[$ (D) $] \pi r; 2\pi r [$
(B) $[0; 2\pi r]$ (E) $\left] \frac{-\pi r}{2}; \frac{\pi r}{2} \right[$
(C) $]0; \pi r [$

7. *Sans réponse préformulée* — Le nombre entier k est différent de 1 et de -1 . Pour quelle valeur entière de a l'égalité

$$\frac{(1-k)^2}{(1+k)^2} - \frac{(1+k)^2}{(1-k)^2} = \frac{-ak(1+k^2)}{(1-k^2)^2}$$

est-elle correcte ?

8. Quel est le plus grand des nombres suivants ?

- (A) $50^{1/24}$ (B) $20^{1/16}$ (C) $10^{1/12}$ (D) $5^{1/8}$ (E) $2^{1/6}$

9. *Sans réponse préformulée* — On appelle « 2-3-code » un code composé de deux lettres suivies de trois chiffres. Par exemple, ZE117 et ZZ999 sont des 2-3-codes. Combien existe-t-il de dizaines de 2-3-codes qui commencent par L, ne contiennent ni J, ni W, ni chiffres pairs et ne se terminent ni par 5, ni par 9 ?

10. La fonction f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} est définie par $f(x) = (1+x^{-1})^{-1}$. Que vaut $\underbrace{(f \circ f \circ f \circ \dots \circ f)}_{2009}(1)$?

- (A) -2010 (B) -2009 (C) 1 (D) $\frac{1}{2009}$ (E) $\frac{1}{2010}$

11. Les trois médailles (or, argent et bronze) ont été gagnées par Eddy, Fabian et Guy. Selon un spectateur, Fabian a gagné la médaille d'or et Eddy celle d'argent. Selon un autre, c'est Guy qui a obtenu la médaille d'or et Fabian celle d'argent. Dans chacune de ces affirmations, l'attribution d'une médaille est correcte et l'autre est fausse. Dès lors

- (A) Guy a obtenu la médaille d'or.
 (B) Fabian a obtenu la médaille d'argent.
 (C) Eddy a obtenu la médaille de bronze.
 (D) Il est impossible de déterminer qui a gagné la médaille de bronze.
 (E) Les informations ne permettent pas de savoir si la médaille d'or a été gagnée par Guy ou par Fabian.

12. *Sans réponse préformulée* — Sachant que $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, que $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$ et que $A_9^p = 504$, que vaut p ?

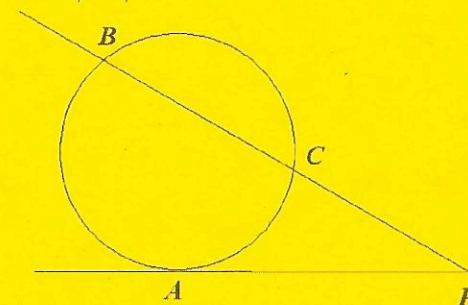
13. Soient un pentagone régulier $ABCDE$ et un cercle de centre O . Ce cercle est tangent en A au côté $[AB]$ et tangent en D au côté $[CD]$ du pentagone. Quelle est, en degrés, l'amplitude de l'angle \widehat{AOD} ?

- (A) 108 (B) 144 (C) 153 (D) 172 (E) 198

14. Que vaut le rayon de la plus grande sphère contenue dans un cône droit dont le rayon de la base est de longueur r et dont la hauteur mesure $\frac{4r}{3}$?

- (A) $\frac{r}{2}$ (B) $\frac{2r}{3}$ (C) $\frac{3r}{2}$ (D) $r\sqrt{3}$ (E) $\frac{2r\sqrt{3}}{3}$

15. D'un point P extérieur à un cercle, on mène une droite tangente au cercle en A et une droite sécante au cercle en B et C . Sachant que $|PA| = 6$ et $|PB| = 9$, que vaut $|BC|$?



- (A) $2\sqrt{6}$ (B) 5 (C) $\frac{16}{3}$ (D) 6

- (E) Les données sont insuffisantes pour répondre.

16. *Sans réponse préformulée* — On appelle *octet* une suite de huit chiffres 0 ou 1. Par exemple, 01011100 ou 00000111 sont des octets. Combien existe-t-il d'octets contenant au moins 4 fois le chiffre 0 ?

17. Soit E un point intérieur au rectangle $ABCD$ et soient a, b, c, d les distances respectives du point E aux sommets A, B, C, D du rectangle. La valeur de d est

- (A) $a+b-c$ (B) $a-b+c$ (C) $b+c-a$ (D) $\sqrt{a^2+b^2-c^2}$ (E) $\sqrt{a^2-b^2+c^2}$

18. *Sans réponse préformulée* — Quelle est la solution de l'équation

$$\frac{\sqrt{5u+8} + \sqrt{5u-8}}{\sqrt{5u+8} - \sqrt{5u-8}} = 2$$

d'inconnue réelle u ?