

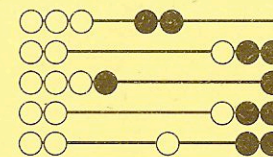
29. Quel est le nombre de solutions de l'équation $3 \times 2^m + 3 = n^2$, d'inconnue $(m, n) \in \mathbf{Z}^2$?

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) Un nombre fini > 2 (E) Une infinité

30. *Sans réponse préformulée* — Soit ABC un triangle non dégénéré. On choisit 3 points distincts A_1, A_2, A_3 sur $]BC[$, 5 points distincts B_1, \dots, B_5 sur $]CA[$ et 7 points distincts C_1, \dots, C_7 sur $]AB[$. Combien de triangles non dégénérés ont leurs trois sommets dans $\{A, A_1, A_2, A_3, B, B_1, \dots, B_5, C, C_1, \dots, C_7\}$?



**OLYMPIADE
MATHÉMATIQUE BELGE**



Trente-cinquième Olympiade Mathématique Belge

Organisée par la Société des Professeurs de Mathématique

Maxi demi-finale 2010

INSTRUCTIONS

1. N'ouvrez pas ce livret avant le signal de votre professeur.
2. Vous indiquerez vos réponses au verso de cette page.
3. Ce questionnaire contient 30 questions ; répondez à 5 questions au moins.
4. Vingt-deux questions sont à choix multiple. Chacune est suivie de réponses désignées par (A), (B), (C), (D) et (E). Chaque question possède une seule réponse correcte. Décidez quelle est la réponse correcte parmi les cinq proposées et retenez la lettre majuscule correspondante. Sur la feuille réponse, écrivez cette lettre dans le cercle situé à droite du numéro de la question.
EXEMPLE : si vous estimez que la réponse correcte à la question numéro 17 est celle précédée de la lettre (D), vous écrirez D sur la feuille réponse, à droite du numéro 17, dans le cercle.
5. Huit questions sont sans réponses préformulées. Dans ce cas, la réponse correcte est un nombre entier dans $[0; 999]$. C'est ce nombre que vous écrirez dans la case rectangulaire de la feuille réponse.
6. RÈGLES DE COTATION : Vous recevez 5 points par réponse correcte, 2 points par abstention et 0 point par réponse fausse. Avec ce système, deviner fera en moyenne diminuer votre score. Vous n'avez intérêt à deviner que si vous avez au moins une chance sur deux de bien choisir.
7. Reportez les réponses au fur et à mesure que vous les obtenez. Écrivez au crayon (si vous changez d'avis, gomez la réponse). Du papier de brouillon, du papier millimétré, une règle, un compas, une gomme peuvent être utilisés. Les calculatrices et règles à calcul ne sont pas autorisées, de même que les livres et les notes personnelles.
8. Au signal de votre professeur, détachez la feuille de couverture sans déchirer le questionnaire, retournez-la, couvrez-en les questions, puis inscrivez les informations demandées.
9. Quand votre professeur vous l'indiquera, commencez le travail sur les problèmes. Vous disposez de 90 minutes.

Les participants sélectionnés pour la finale recevront par l'intermédiaire de leur école une fiche qu'ils devront compléter. Le jour de la finale, ils se muniront de cette fiche ainsi que de leur carte d'identité.

Mercredi 10 mars 2010

À REMPLIR PAR L'ÉLÈVE (en majuscules)

Nom :

Prénom :

Classe :

Adresse privée

Rue et n° :

Code postal et localité :

École

Nom (sans abréviations) :

Adresse

Rue et n° :

Code postal et localité :

CADRE RÉSERVÉ AU PROFESSEUR

Chaque réponse correcte a une valeur de 5 points et chaque abstention a une valeur de 2 points ; rien n'est déduit pour une réponse fausse. Le score total est calculé en prenant 5 fois le nombre de réponses correctes et en ajoutant 2 fois le nombre d'abstentions.

Réponses correctes : × 5 =

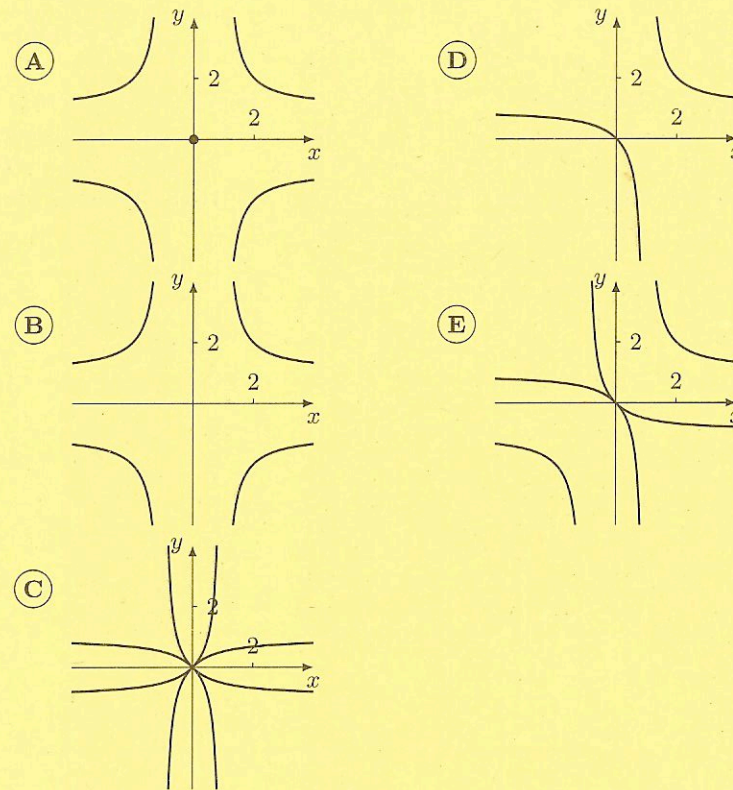
+

Abstentions : × 2 =

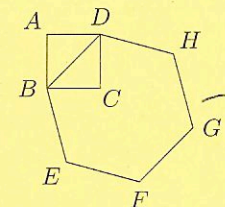
Score total :

- 1
- 2
- 3
- 4
- 5
- 6
- 7
- 8
- 9
- 10
- 11
- 12
- 13
- 14
- 15
- 16
- 17
- 18
- 19
- 20
- 21
- 22
- 23
- 24
- 25
- 26
- 27
- 28
- 29
- 30

26. L'un des diagrammes suivants représente l'ensemble des solutions de l'équation $|x + y| = |xy|$, d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Lequel ?



27. Dans la figure ci-contre, l'aire du carré $ABCD$ est d'un centimètre carré et l'hexagone $BEFGHD$ est régulier. Quelle est, en centimètres carrés, l'aire du quadrilatère $BCHD$?



- (A) $\frac{5}{4}$ (B) $\frac{3\sqrt{6}}{4}$ (C) $\frac{(1+\sqrt{2})\sqrt{3}}{2}$
 (D) $(2 - \sqrt{2})\sqrt{3}$ (E) $\frac{3+\sqrt{3}}{4}$

28. Soit a, b et c trois réels non nuls. Si p et q sont les racines de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, d'inconnue réelle x , quelle est la valeur de $\frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2}$?

- (A) $\frac{1}{b^2 - 4ac}$ (B) $\frac{b^2 - 4ac}{4a}$ (C) $\frac{b^2 - 2ac}{c^2}$ (D) $\frac{b^2 - 4ac}{c^2}$ (E) $b^2 - 4ac$

21. Les cinq expressions

$$2a + 9, \quad 3a + 10, \quad 4a + 11, \quad 5a + 12 \quad \text{et} \quad 6a + 13$$

dépendent de la variable a . L'une des affirmations suivantes est vraie. Laquelle ?

- (A) Il existe un naturel a pour lequel les cinq expressions sont paires.
- (B) Il existe un naturel a pour lequel les cinq expressions sont impaires.
- (C) Quel que soit le naturel a , les cinq expressions sont paires.
- (D) Quel que soit le naturel a , les cinq expressions sont impaires.
- (E) Il existe un naturel a pour lequel les cinq expressions sont multiples de 5.

22. Pour combien de naturels n l'expression $n^4 + n^2 + 1$ est-elle un nombre premier ?

- (A) 1
- (B) 2
- (C) 3
- (D) 5
- (E) Une infinité

23. *Sans réponse préformulée* — Pour combien de valeurs entières de n la fraction $\frac{n^2 + 5n + 6}{n^2 + 3n + 2}$ est-elle entière ?

24. Soit $k \neq 0$. La fonction $x \mapsto 5 \sin kx - 3 \cos kx$

- (A) Est périodique de période $\frac{k\pi}{2}$;
- (B) Est périodique de période $\frac{2\pi}{k}$;
- (C) Est périodique de période $k\pi$;
- (D) Est périodique de période $\frac{2}{k\pi}$;
- (E) N'est pas périodique.

25. *Sans réponse préformulée* — Combien de rectangles contenant la case noire y a-t-il dans la figure ci-contre ?



1. *Sans réponse préformulée* — Un carré a un périmètre de 120 cm ; quelle est son aire, en centimètres carrés ?

2. *Sans réponse préformulée* — Quand on ajoute 7 au naturel non nul n , on obtient un nombre multiple de 7 ; quand on ajoute 8 à n , on obtient un nombre multiple de 8 ; quand on ajoute 9 à n , on obtient un nombre multiple de 9. Quelle est la plus petite valeur possible de n ?

3. Sur la droite joignant les points de coordonnées (6, 12) et (0, -6) se trouve aussi le point de coordonnées :

- (A) (-3, -8)
- (B) (-1, -4)
- (C) $(2, \frac{1}{2})$
- (D) (3, 3)
- (E) (7, 14)

4. Un hexagone régulier est inscrit dans un cercle. Quel est le rapport de la longueur d'un de ses côtés à celle de l'arc qu'il sous-tend ?

- (A) $\frac{3}{\pi}$
- (B) $\frac{6}{\pi}$
- (C) $\frac{3}{2\pi}$
- (D) $\frac{2}{3\pi}$
- (E) $\frac{1}{6}$

5. *Sans réponse préformulée* — Un nombre de 6 chiffres de la forme $\overline{133ab5}$ est divisible par 7 et par 9. Quelle est la plus grande valeur possible pour le nombre \overline{ab} ?

6. Que vaut $\frac{x+y}{x-y}$ si $0 < y < x$ et $x^2 + y^2 = 6xy$?

- (A) $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$
- (B) $\frac{1}{\sqrt{2}}$
- (C) $\sqrt{2}$
- (D) $2\sqrt{2}$
- (E) Une autre valeur

7. *Sans réponse préformulée* — Je roule à vélomoteur, à vitesse constante, sur une route bordée de bornes kilométriques. Je viens de passer devant une borne indiquant un nombre de kilomètres à deux chiffres. Une heure plus tard, je passe devant une autre borne qui porte les deux mêmes chiffres dans l'ordre inverse. Encore une heure plus tard, je lis sur une troisième borne les deux mêmes chiffres que sur la première, dans le même ordre, mais avec un zéro intercalé. Quelle est ma vitesse, en kilomètres par heure ?

8. Arthur, Bernard et Claude sont soupçonnés d'un vol. L'enquête a établi que :

- Si Arthur n'est pas coupable, alors Bernard et Claude sont tous deux coupables ;
- Arthur n'est pas coupable ou Bernard est coupable ;
- Bernard n'est pas coupable ou Claude n'est pas coupable.

Qui a commis le vol ?

N.B. : Le « ou » n'est pas exclusif !

- (A) Arthur et Bernard (D) Claude et lui seul
 (B) Arthur et lui seul (E) Les informations ne suffisent pas pour le déterminer.
 (C) Bernard et Claude

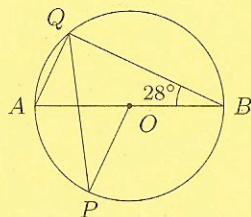
9. Les faces triangulaires d'une pyramide à base carrée sont équilatérales. Une seconde pyramide à base carrée a pour sommets les centres des faces de la première. Quel est le rapport du volume de la grande pyramide à celui de la petite ?

- (A) $\frac{27}{2}$ (B) $\frac{27}{4}$ (C) $\frac{9}{2}$ (D) 27 (E) 8

10. Dans le triangle ABC , $|AB| = |AC|$. Les points P et Q appartiennent respectivement à $[AC]$ et à $[AB]$ et sont tels que $|BP| = |BC| = |PQ| = |QA|$. Que vaut, en degrés, l'amplitude de \widehat{BAC} ?

- (A) $\frac{360}{11}$ (B) $\frac{180}{7}$ (C) $\frac{51}{5}$ (D) 36 (E) 72

11. *Sans réponse préformulée* — Dans la figure (imprécise) ci-contre, O est le centre du cercle. Quelle est, en degrés, l'amplitude de \widehat{AQP} , sachant que $\widehat{ABQ} = 28^\circ$ et que QA et OP sont parallèles ?



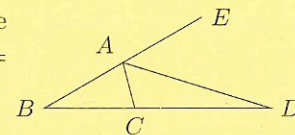
12. Dans le triangle ABC , rectangle en A , soit $a = |BC|$, $b = |AC|$ et $c = |AB|$. Soit H le pied de la hauteur issue de A . Le cercle de diamètre $[AH]$ coupe AB en P et AC en Q . Quel est le rapport de l'aire du triangle ABC à celle du triangle APQ ?

- (A) $\frac{a^4}{b^2 \cdot c^2}$ (B) $\frac{a^2}{b \cdot c}$ (C) $\frac{a^2}{b^2 + c^2}$ (D) $\frac{1 + b \cdot c}{1 - b \cdot c}$ (E) $\frac{1}{4}$

13. Combien de couples (x, y) d'entiers vérifient l'équation $\sqrt{x} - \sqrt{17} = \sqrt{y}$?

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 17 (E) Une infinité

14. *Sans réponse préformulée* — Dans la figure (imprécise) ci-contre, $\widehat{EAD} = \widehat{CAD}$, $|BA| = |BC| = 8$ et $|AC| = 4$. Que vaut $|CD|$?



15. Combien de réels existe-t-il dont les racines carrée et cubique sont égales ?

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) Une infinité

16. Si a est un entier, $36^{\sqrt{9a^2}} =$

- (A) 6^{3a} ; (B) $6^{3|a|}$; (C) 36^{3a} ; (D) $36^{3|a|}$; (E) 6^{9a^2} .

17. *Sans réponse préformulée* — Voici le début d'un tableau triangulaire de nombres, qui comporte 2010 lignes :

1
1 -1
1 -1 1
1 -1 1 -1
...

Quelle est la somme des chiffres de la somme de tous les nombres de ce tableau ?

18. $(\cos 15^\circ + \sin 15^\circ)^2 - 3 \cos 15^\circ \sin 15^\circ =$

- (A) 0 (B) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ (C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (D) $\frac{3}{4}$ (E) 1

19. *Sans réponse préformulée* — Quel est le coefficient de $a^8 b^2$ dans le développement de $(a + b)^{10}$?

20. *Sans réponse préformulée* — Que vaut x si $\sqrt[9]{8} + \sqrt[3]{x} = \frac{7}{3-\sqrt{2}}$?