24. Lorsqu'il est à une distance d de la ligne d'arrivée, le coureur A roule en tête à la vitesse v et il a une avance a sur son poursuivant B le plus proche. À quelle vitesse w doit rouler B pour passer la ligne d'arrivée en même temps que A, si celui-ci maintient sa vitesse v ?

(A) $w = av/(d+a)$
(B) $w = v(1+a/d)$
(C) $w = a/v + d/(1+v)$
(D) $w = (a+d)(v+1)/v$
(E) $w = av/(d+1)$

25. Combien y a-t-il de naturels k pour lesquels l'équation $x^2 + k^2x - 12 = 0$, d'inconnue x, admet au moins une solution entière ?

(A) Une infinité (B) 3 (C) 2 (D) 1 (E) 0

26. *Sans réponse préformulée* — Cinq entiers a, b, c, d, e strictement supérieurs à 1 satisfont les équations :

$$\begin{cases} a(b+c+d+e) = 128 \\ b(a+c+d+e) = 155 \\ c(a+b+d+e) = 203 \\ d(a+b+c+e) = 243 \\ e(a+b+c+d) = 275. \end{cases}$$

Que vaut la somme $a+b+c+d+e$?

27. *Sans réponse préformulée* — Soit $(u_0, u_1, \ldots)$ la suite de nombres entiers définie par : $u_0 = 2$ et, pour tout n, u_{n+1} est le reste de la division de u_n^2 par 11. Que vaut u_{100} ?

28. *Sans réponse préformulée* — Dans le plan muni d'un repère, chaque ensemble de points d'abscisses toutes différentes détermine un certain nombre de pentes, qui sont les pentes des droites joignant deux de ses points. Quel est le plus grand nombre de pentes déterminées par un ensemble de trente points du plan d'abscisses toutes différentes ?

29. Quelle est la plus petite distance entre un point d'une arête d'un tétraèdre régulier et un point de l'arête opposée, si les arêtes sont de longueur 1 ?

(A) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (D) 1 (E) $\sqrt{2}$

30. *Sans réponse préformulée* — On considère les triangles rectangles non isométriques deux à deux dont les côtés ont pour longueurs des nombres entiers et dont l'aire est égale en valeur au périmètre. Quelle est la somme des aires de ces triangles ?

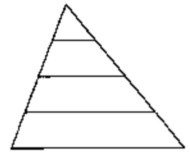
Les participants sélectionnés pour la finale recevront par l'intermédiaire de leur école une fiche qu'ils devront compléter. Le jour de la finale, ils se muniront de cette fiche ainsi que de leur carte d'identité.

1. $50^{30}/100^{15} =$

(A) $\frac{1}{2}$ (B) 1 (C) 2 (D) 5^{15} (E) 25^{15}

2. *Sans réponse préformulée* — Si $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \cdots - \frac{1}{1024} = \frac{x}{1024}$, que vaut x ?

3. *Sans réponse préformulée* — Dans un triangle acutangle de base 8 et de hauteur 40, sont tracées trois parallèles à la base ; elles déterminent trois trapèzes de hauteur 10. Dans chacun de ces trois trapèzes est inscrit le plus grand rectangle possible (avec deux côtés inclus dans les bases du trapèze). Quelle est l'aire totale des trois rectangles ?



4. *Sans réponse préformulée* — Quelle est la racine carrée de la somme de tous les naturels impairs inférieurs à 100 ?

5. Que vaut l'angle des droites prolongeant les côtés $[AB]$ et $[DE]$ d'un pentagone régulier $ABCDE$?

(A) 30° (B) 32° (C) 35° (D) 36° (E) 40°

6. *Sans réponse préformulée* — Les nombres entiers a, b, c et d sont tels que $a < 2b$, $b < 3c$, $c < 4d$ et $d < 40$. Quelle est la valeur maximale de a ?

7. Si les solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ sont x_1 et x_2, quelle est, parmi les équations suivantes, celle dont les solutions sont $ax_1 + b$ et $ax_2 + b$?

(A) $x^2 - bx - ac = 0$
(B) $x^2 - bx + ac = 0$
(C) $x^2 + 3bx + ac + 2b^2 = 0$
(D) $x^2 + 3bx - ac + 2b^2 = 0$
(E) $x^2 + bx(2-a) + a^2c + b^2(a+1) = 0$

8. Sur une étagère, un libraire a rangé 31 livres, de gauche à droite, par ordre de prix croissants. L'écart entre les prix de deux livres voisins est chaque fois de deux euros. Pour le livre situé à l'extrémité droite, un acheteur paiera le même prix que pour le livre du milieu et l'un de ses voisins. Dans ces conditions,

(A) Le voisin en question est le voisin de gauche ;
(B) Le livre du milieu coute 36 euros ;
(C) Le livre le moins cher coute 4 euros ;
(D) Le livre le plus cher coute 64 euros ;
(E) Aucune des affirmations précédentes n'est correcte.

9. De combien de manières différentes un rectangle 12×1 peut-il être pavé par des rectangles de tailles 2×1 ou 3×1 ? (Un nombre suffisant de rectangles de chacun des deux types est disponible.)

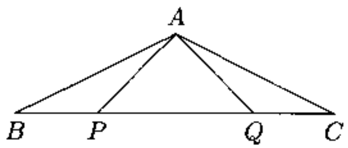
(A) 3 (B) 5 (C) 9 (D) 11 (E) 12

10. Une des hauteurs d'un triangle équilatéral d'aire 1200 est un côté d'un deuxième triangle équilatéral ; une des hauteurs de celui-ci est un côté d'un troisième triangle équilatéral. Quelle est l'aire de ce troisième triangle ?

(A) $600\sqrt{3}$ (B) 900 (C) 800 (D) 675 (E) 600

11. *Sans réponse préformulée* — Si deux entiers positifs m et n sont liés par la relation $m^2 - n^2 = 2013$, quel est le nombre de valeurs possibles de $m^2 + n^2$?

12. Dans le triangle isocèle ABC ci-contre, $|BP| = |CQ| = \frac{1}{4}|BC|$; l'angle $\widehat{PAQ}$ est droit. Que vaut la tangente de l'angle $\widehat{BAC}$?



(A) -4 (B) -2 (C) $-4/3$ (D) 2 (E) 4

13. Si le polynôme $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ admet les racines r, s, t, u, alors $-r$, $-s$, $-t$, $-u$ sont toujours les racines du polynôme

(A) $-ax^4 - bx^3 - cx^2 - dx - e$
(B) $ax^4 - bx^3 - cx^2 - dx - e$
(C) $ax^4 + bx^3 + cx^2 - dx - e$
(D) $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx - e$
(E) $ax^4 - bx^3 + cx^2 - dx + e$

14. Pour tout réel x, l'expression

$$(x-1)^5 + 5(x-1)^4 + 10(x-1)^3 + 10(x-1)^2 + 5(x-1) + 1$$

est égale à

(A) $(x-2)^5$; (B) $(x-2)^6$; (C) $(x-1)^6$; (D) x^5 ; (E) $(x+1)^5$.

15. *Sans réponse préformulée* — Quel est le nombre de triplets (x, y, z) d'entiers strictement supérieurs à 1, solutions de $x \cdot y \cdot z = 2 \cdot 2013$?

16. *Sans réponse préformulée* — Dans le plan muni d'un repère orthonormé, quelle est l'aire de la région intérieure à la ligne polygonale d'équation $|2x - 2014| + |y - 2013| = 29$?

17. *Sans réponse préformulée* — Quelle est la mesure en degrés (dans l'intervalle $]0; 180[$) du plus petit angle du triangle dont les côtés sont les droites d'équations $x + y\sqrt{3} + 1 = 0$, $x\sqrt{3} + y + 1 = 0$ et $y = x - 10$?

18. Dans un triangle rectangle ABC, l'expression $\dfrac{\sin^2 \widehat{A} + \sin^2 \widehat{B} + \sin^2 \widehat{C}}{\cos^2 \widehat{A} + \cos^2 \widehat{B} + \cos^2 \widehat{C}}$

(A) Vaut 2 ; (B) Vaut 1 ; (C) Vaut $\frac{1}{2}$; (D) Vaut 0 ;
(E) Dépend du triangle.

19. Si elle existe, la dérivée d'une fonction impaire et croissante

(A) Est nécessairement impaire et négative ;
(B) Est nécessairement impaire mais pas nécessairement négative ;
(C) Est nécessairement positive mais pas nécessairement paire ;
(D) Est nécessairement paire et positive ;
(E) Ne possède aucune des propriétés précédentes.

20. La courbe plane représentée par l'équation $(x^2 + y^2)^2 = 4x^2y^2$ peut aussi l'être par :

(A) $x = y$;
(B) $x + y = 0$;
(C) $x^2 = y^2$;
(D) $x^2 + y^2 = 2$;
(E) $x^2 + y^2 = 2xy$.

21. Soit $A_1A_2 \ldots A_{10}$ un décagone régulier convexe de centre O. Effectuer successivement les symétries par rapport aux droites $OA_1, OA_2, \ldots, OA_5$ revient à effectuer

(A) La symétrie centrée par rapport à O ;
(B) La transformation identique ;
(C) La symétrie par rapport à la droite OA_6 ;
(D) La symétrie par rapport à la droite OA_{10} ;
(E) La symétrie par rapport à la droite OA_3.

22. Combien existe-t-il de nombres premiers p satisfaisant

$$2013! + 1 < p \leqslant 2013! + 2013,$$

où $n! = n \cdot (n-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 23 (E) 2011

23. Le graphe de la fonction $\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} : x \mapsto x^3$ est transformé en le graphe de la fonction $\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} : x \mapsto \sqrt[3]{x}$ par exactement

(A) Une symétrie axiale ;
(B) Une symétrie centrale ;
(C) Deux symétries axiales ;
(D) Deux symétries : l'une centrale et l'autre axiale ;
(E) Trois symétries : deux axiales et une centrale.