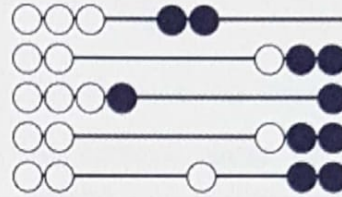




**OLYMPIADE  
MATHEMATIQUE BELGE**



## **Quarante-troisième Olympiade Mathématique Belge**

*Organisée par la Société Belge des Professeurs de Mathématique*

### **Maxi demi-finale 2018**

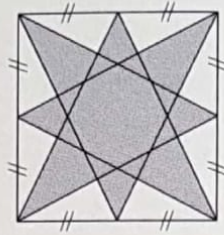
#### **INSTRUCTIONS**

1. N'ouvrez pas ce livret avant le signal de votre professeur.
2. Vous indiquerez vos réponses au verso de cette page.
3. Ce questionnaire contient 30 questions ; répondez à 5 questions au moins.
4. Quinze questions sont à choix multiple. Chacune est suivie de réponses désignées par **(A)**, **(B)**, **(C)**, **(D)** et **(E)**. Chaque question possède une seule réponse correcte. Décidez quelle est la réponse correcte parmi les cinq proposées et reprenez la lettre majuscule correspondante. Sur la feuille réponse, écrivez cette lettre dans le cercle situé à droite du numéro de la question.  
EXEMPLE : si vous estimez que la réponse correcte à la question numéro 17 est celle précédée de la lettre **(D)**, vous écrirez D sur la feuille réponse, à droite du numéro 17, dans le cercle.
5. Quinze questions sont sans réponses préformulées. Dans ce cas, la réponse correcte est un nombre entier dans  $[0; 999]$ . C'est ce nombre que vous écrirez dans la case rectangulaire de la feuille réponse.
6. **RÈGLES DE COTATION** : Vous recevez 5 points par réponse correcte, 2 points par abstention et 0 point par réponse fautive. Avec ce système, deviner fera en moyenne diminuer votre score. Vous n'avez intérêt à deviner que si vous avez au moins une chance sur deux de bien choisir.
7. Reportez les réponses au fur et à mesure que vous les obtenez. Écrivez au crayon (si vous changez d'avis, gomez la réponse). Du papier de brouillon, du papier millimétré, une règle, un compas, une gomme peuvent être utilisés. Les calculatrices et règles à calcul ne sont pas autorisées, de même que les livres et les notes personnelles.
8. Au signal de votre professeur, détachez la feuille de couverture sans déchirer le questionnaire, retournez-la, couvrez-en les questions, puis inscrivez les informations demandées.
9. Quand votre professeur vous l'indiquera, commencez le travail sur les problèmes. Vous disposez de 90 minutes.

**Mercredi 28 février 2018**



8. Quelle est l'aire de la forme étoilée, ombrée, inscrite dans ce carré de côté  $a$  ?

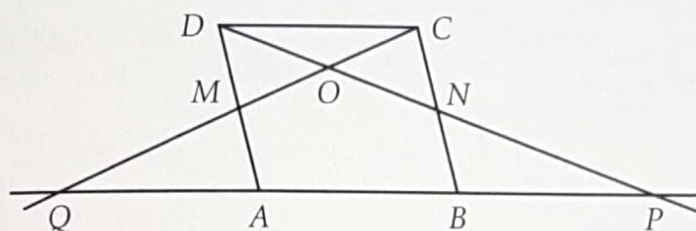


- (A)  $\frac{2}{5}a^2$       (B)  $\frac{3}{5}a^2$       (C)  $\frac{4}{5}a^2$       (D)  $\frac{7}{10}a^2$       (E)  $\frac{11}{10}a^2$

9. *Sans réponse préformulée* — Quelle est la somme des naturels  $n$  pour lesquels  $n^2 - 15n + 56$  est un nombre premier ?
10. *Sans réponse préformulée* — Les milieux des côtés d'un hexagone régulier sont les sommets d'un nouvel hexagone. L'aire de ce dernier est  $p\%$  de celle de l'hexagone initial. Que vaut  $p$  ?
11. *Sans réponse préformulée* — Dans un triangle rectangle, les médianes tracées à partir des deux angles aigus mesurent 19 et 22 respectivement. Que mesure l'hypoténuse ?
12. *Sans réponse préformulée* — Combien existe-t-il de couples  $(x, y)$  de naturels tels que  $x^2 - y^2 = 1600$  ?
13. *Sans réponse préformulée* — Dans le plan  $Oxy$ , quelle est l'aire du polygone dont le bord est décrit par l'équation  $|x| + |y| = 3$  ?
14. Si  $a, b$  et  $c$  sont trois nombres strictement compris entre 0 et 1, tels que  $a^2 = b^4 = c$ , quelles sont les inégalités correctes ?

- (A)  $a > b > c$       (B)  $a > c > b$       (C)  $b > a > c$       (D)  $b > c > a$       (E)  $c > a > b$

15. L'aire du parallélogramme  $ABCD$  est 8. Les points  $M$  et  $N$  sont respectivement les milieux de  $[AD]$  et de  $[BC]$ . Les droites  $CM$  et  $DN$  coupent  $AB$  respectivement en  $Q$  et en  $P$ . Le point  $O$  est l'intersection de  $DP$  et  $CQ$ . Que vaut l'aire du triangle  $OPQ$  ?

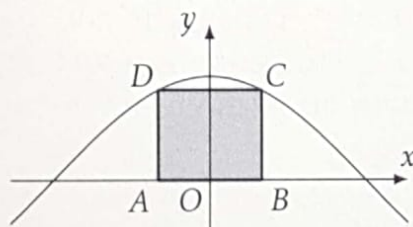


- (A) 7,5      (B) 8      (C) 8,5      (D) 9      (E) 9,5

16. Si le triangle  $ABC$  est inscrit dans un demi-cercle de diamètre  $[AB]$ , alors nécessairement :

- (A)  $|AC|^2 + |BC|^2 < |AB|^2/\sqrt{2}$ ;      (D)  $|AC| + |BC| \geq |AB|\sqrt{2}$ .  
 (B)  $|AC|^2 + |BC|^2 > \sqrt{2}|AB|^2$ ;      (E) Aucune de ces inégalités  
 (C)  $|AC| + |BC| \leq |AB|\sqrt{2}$ ;

17. *Sans réponse préformulée* — Le côté  $AB$  du rectangle  $ABCD$  est situé sur l'axe  $Ox$ . Ses sommets  $C$  et  $D$  sont sur la courbe d'équation  $y = k \cos x$ . Si  $|AB| = \frac{\pi}{3}$  et que l'aire du rectangle est  $\frac{5\pi}{\sqrt{3}}$ , que vaut le coefficient  $k$  ?



18. *Sans réponse préformulée* — Le reste de la division de  $n$  par 7 est 4. Quel est le reste de la division de  $n^2 + 3$  par 7 ?
19. Un vase cylindrique et un vase conique (posé sur sa pointe) ont même hauteur et leurs bases sont des disques de même rayon. Ce matin, je les ai placés, tous deux vides, côte à côte dans mon jardin. La pluie de la journée a rempli le second sur une hauteur de 72 mm ; à quelle hauteur l'eau s'élève-t-elle dans le premier ?

- (A) 24 mm      (B) 72 mm      (C) 216 mm  
 (D) Une autre valeur bien déterminée  
 (E) Le problème ne peut être résolu, par manque de données.

20. *Sans réponse préformulée* — Une diagonale d'un polygone est un segment qui relie deux sommets non consécutifs. Quel est le nombre de diagonales d'un polygone convexe à 45 côtés ?

21. *Sans réponse préformulée* — Que vaut la somme des coefficients dans l'expression développée de  $(a + b)^9$ , si les coefficients 1 ne sont pas pris en compte ?

22. *Sans réponse préformulée* — Quel est le plus grand diviseur commun à tous les nombres de la forme  $M^2 - N^2$ , où  $M$  et  $N$  sont deux naturels impairs tels que  $N < M$  ?

23. Le système

$$\begin{cases} cx + y = 3 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

a une solution unique  $(x, y)$  qui se trouve dans le premier quadrant ouvert (c'est-à-dire la partie du plan déterminée par  $x > 0$  et  $y > 0$ ) si et seulement si

- (A)  $c = -1$    (B)  $c > -1$    (C)  $c < \frac{3}{2}$    (D)  $0 < c < \frac{3}{2}$    (E)  $-1 < c < \frac{3}{2}$

24. *Sans réponse préformulée* — Trois mille bonbons sont distribués au hasard à cent quatre-vingt-cinq enfants. Quel est le plus grand naturel  $n$  pour lequel il est certain qu'au moins un enfant a reçu au moins  $n$  bonbons ?

25. Un cercle de rayon 5 et un carré de côté  $5\sqrt{3}$  sont centrés en un même point. Quelle est l'aire totale des parties du plan à la fois intérieures au carré et extérieures au cercle ?

- (A)  $25\left(3 - \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right)$    (D)  $25\left(3 + \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right)$   
(B)  $25\left(3 - \sqrt{3} - \frac{2\pi}{3}\right)$    (E)  $25\left(3 + \sqrt{3} - \frac{2\pi}{3}\right)$   
(C)  $25\left(\frac{2\pi}{3} - \sqrt{3}\right)$

26. *Sans réponse préformulée* — Combien existe-t-il de valeurs naturelles de  $m$  pour lesquelles l'équation  $x^2 - 24x + m = 0$  possède deux solutions qui sont des nombres premiers ?

27. Soit  $a$  un réel non nul et  $b$  un réel. Nécessairement, le graphe de la fonction

$$f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} : x \mapsto ax^2 + bx + \frac{b^2}{4a}$$

- (A) Est tangent à l'axe  $Ox$  ;                      (D) A sa concavité vers le bas ;  
(B) Est tangent à l'axe  $Oy$  ;                      (E) Se trouve dans un seul quadrant.  
(C) A sa concavité vers le haut ;
28. *Sans réponse préformulée* — La longueur de la base d'un triangle isocèle est  $4\sqrt{7}$ . Les médianes issues des extrémités de la base sont perpendiculaires. Que vaut l'aire de ce triangle ?
29. L'équation  $x + \sqrt{x-1} = 1$ , d'inconnue réelle  $x$ , admet
- (A) Deux solutions, positives ;                      (D) Exactement une solution, positive ;  
(B) Deux solutions, négatives ;                      (E) Exactement une solution, négative.  
(C) Aucune solution ;
30. *Sans réponse préformulée* — Dans le trapèze  $ABCD$  de bases  $[AB]$  et  $[DC]$ ,  $|BC| = |DC| = 125$  et  $|AD| = |DB| = 75$ . Quel est le périmètre de ce trapèze ?

Les participants sélectionnés pour la finale recevront par l'intermédiaire de leur école une fiche qu'ils devront compléter. Le jour de la finale, ils se muniront de cette fiche ainsi que de leur carte d'identité.

# OLYMPIADE MATHÉMATIQUE BELGE

## Maxi demi-finale 2018

### Grille des réponses

Voici les réponses du questionnaire de la Maxi demi-finale 2018 (élèves de 5<sup>e</sup> et 6<sup>e</sup>).

Utiliser le signe  $\vee$  pour une réponse correcte, une croix  $\times$  pour une réponse fautive et un cercle  $\circ$  pour une abstention.

Introduire, dans la case réservée à cet effet sur la feuille de l'élève, le nombre de **réponses correctes** et le nombre d'**abstentions**. Les réponses fausses ne sont pas reportées.

Calculer le score de l'élève en utilisant la formule indiquée sur la feuille de l'élève.

- 1  B
- 2  D
- 3
- 4  B
- 5  C
- 6  D
- 7  E
- 8  B
- 9
- 10
- 11
- 12
- 13
- 14  C
- 15  D
- 16  C
- 17
- 18
- 19  E
- 20
- 21
- 22
- 23  E
- 24
- 25  A
- 26
- 27  A
- 28
- 29  D
- 30