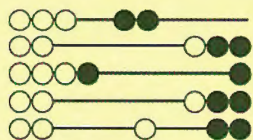




**OLYMPIADE  
MATHÉMATIQUE BELGE**



## Quarante-quatrième Olympiade Mathématique Belge

*Organisée par la Société Belge des Professeurs de Mathématique*

### Maxi demi-finale 2019

#### INSTRUCTIONS

- N'ouvrez pas ce livret avant le signal de votre professeur.
- Vous indiquerez vos réponses au verso de cette page.
- Ce questionnaire contient 30 questions ; répondez à 5 questions au moins.
- Quinze questions sont à choix multiple. Chacune est suivie de réponses désignées par **(A)**, **(B)**, **(C)**, **(D)** et **(E)**. Chaque question possède une seule réponse correcte. Décidez quelle est la réponse correcte parmi les cinq proposées et retenez la lettre majuscule correspondante. Sur la feuille réponse, écrivez cette lettre dans le cercle situé à droite du numéro de la question.  
EXEMPLE : si vous estimez que la réponse correcte à la question numéro 17 est celle précédée de la lettre **(D)**, vous écrirez D sur la feuille réponse, à droite du numéro 17, dans le cercle.
- Quinze questions sont sans réponses préformulées. Dans ce cas, la réponse correcte est un nombre entier dans [0;999]. C'est ce nombre que vous écrirez dans la case rectangulaire de la feuille réponse.
- RÈGLES DE COTATION :** Vous recevez 5 points par réponse correcte, 2 points par abstention et 0 point par réponse fausse. Avec ce système, deviner fera en moyenne diminuer votre score. Vous n'avez intérêt à deviner que si vous avez au moins une chance sur deux de bien choisir.
- Reportez les réponses au fur et à mesure que vous les obtenez. Écrivez au crayon (si vous changez d'avis, gomez la réponse). Du papier de brouillon, du papier millimétré, une règle, un compas, une gomme peuvent être utilisés. Les calculatrices et règles à calcul ne sont pas autorisées, de même que les livres et les notes personnelles.
- Au signal de votre professeur, détachez la feuille de couverture sans déchirer le questionnaire, retournez-la, couvrez-en les questions, puis inscrivez les informations demandées.
- Quand votre professeur vous l'indiquera, commencez le travail sur les problèmes. Vous disposez de 90 minutes.

**Mercredi 27 février 2019**

#### À REMPLIR PAR L'ÉLÈVE (en majuscules)

Nom :

Prénom :

Classe :

Adresse privée

Rue et n° :

Code postal et localité :

École

Nom (sans abréviations) :

Adresse

Rue et n° :

Code postal et localité :

#### CADRE RÉSERVÉ AU PROFESSEUR

Chaque réponse correcte a une valeur de 5 points et chaque abstention a une valeur de 2 points ; rien n'est déduit pour une réponse fausse. Le score total est calculé en prenant 5 fois le nombre de réponses correctes et en ajoutant 2 fois le nombre d'abstentions.

Réponses correctes :  × 5 =

Abstentions :  × 2 =

Score total :

1	<input type="radio"/>
2	<input type="radio"/>
3	<input type="text"/>
4	<input type="text"/>
5	<input type="text"/>
6	<input type="radio"/>
7	<input type="radio"/>
8	<input type="radio"/>
9	<input type="radio"/>
10	<input type="text"/>
11	<input type="text"/>
12	<input type="radio"/>
13	<input type="text"/>
14	<input type="radio"/>
15	<input type="text"/>
16	<input type="radio"/>
17	<input type="text"/>
18	<input type="radio"/>
19	<input type="text"/>
20	<input type="radio"/>
21	<input type="radio"/>
22	<input type="radio"/>
23	<input type="radio"/>
24	<input type="text"/>
25	<input type="text"/>
26	<input type="text"/>
27	<input type="text"/>
28	<input type="text"/>
29	<input type="radio"/>
30	<input type="text"/>

1. Si  $r$  est un réel strictement négatif, alors  $|r - 1|$  est égal à :

- (A)  $r - 1$       (B)  $-r - 1$       (C)  $1 - r$       (D)  $1 + r$   
 (E) Aucune des réponses précédentes

2. Les deux nombres 10101010 et 1010101 sont formés respectivement de 8 et 7 chiffres. Que vaut leur différence ?

- (A) 1999999      (B) 8080809      (C) 8090909      (D) 9090909      (E) 9999999

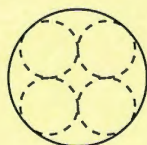
3. *Sans réponse préformulée* — Comme travailleur de l'entreprise, j'ai pu acheter un téléphone « intelligent » au prix d'usine c'est-à-dire à la moitié de ce qu'il est vendu en magasin. Comme je n'en ai pas l'usage, je l'ai revendu 40 % plus cher que ce que je l'avais payé. Celui qui me l'a racheté a cependant encore fait une économie de  $p$  % par rapport à ce qu'il aurait dû payer en magasin. Que vaut  $p$  ?

4. *Sans réponse préformulée* — Soit  $x, y > 0$ . Si  $\frac{y}{x} = \frac{x+y}{x+9y}$ , que vaut  $\frac{x}{y}$  ?

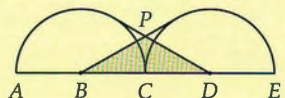
5. *Sans réponse préformulée* — Soit  $N = \overline{93xyz}$  où  $x, y$  et  $z$  sont des chiffres. Quelle est la plus grande valeur de  $x+y+z$  pour laquelle  $N$  est divisible par 6 ?

6. Quel est le rayon du cercle tangent extérieurement à quatre cercles de même rayon  $r$  tangents l'un à l'autre comme sur la figure ci-contre ?

- (A)  $\frac{5}{2}r$       (D)  $2\sqrt{2}r$   
 (B)  $(\sqrt{2}+1)r$       (E)  $(4-\sqrt{2})r$   
 (C)  $\sqrt{5}r$

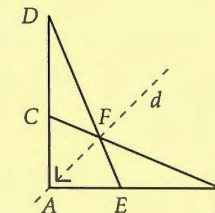


7. Les demi-cercles de centres  $B$  et  $D$  et de rayon 3 sont tangents en  $C$ . La tangente au demi-cercle de diamètre  $[AC]$  issue de  $D$  coupe en  $P$  la tangente au demi-cercle de diamètre  $[CE]$  issue de  $B$ . Que vaut l'aire du triangle  $BDP$  ?



- (A)  $3\sqrt{3}$       (B) 5      (C)  $\frac{6\sqrt{3}-3}{2}$       (D)  $\frac{9}{2}$       (E) 6

8. Le triangle  $ABC$  est rectangle en  $A$  avec  $|AB| = 12$  et  $|AC| = 5$ . La droite  $d$  est la bissectrice de l'angle  $\widehat{A}$ . Le triangle  $ADE$  est l'image de  $ABC$  par la symétrie orthogonale d'axe  $d$ . Les côtés  $BC$  et  $DE$  se coupent en  $F$ . Que vaut l'aire du quadrilatère non convexe  $ABFD$  ?



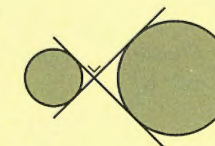
- (A) 48      (B)  $\frac{119}{5}$       (C)  $\frac{480}{13}$       (D)  $\frac{720}{17}$       (E)  $\frac{780}{17}$

9. Dans un triangle  $ABC$ , la médiane issue de  $A$  est perpendiculaire à la médiane issue de  $B$ . Si  $|BC| = 8$  et  $|AC| = 6$ , que vaut  $|AB|$  ?

- (A)  $3\sqrt{2}$       (B)  $2\sqrt{5}$       (C)  $\frac{9}{2}$       (D)  $\frac{11}{\sqrt{5}}$       (E) 5

10. *Sans réponse préformulée* — Si  $11! = \overline{3x91y800}$ , que vaut  $\overline{xy}$  ? (Pour tout naturel  $n$ ,  $n! = n \times (n-1) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$ .)

11. *Sans réponse préformulée* — Les deux tangentes communes intérieures à deux disques disjoints d'aires  $32\pi \text{ cm}^2$  et  $8\pi \text{ cm}^2$  se coupent à angle droit, comme sur la figure ci-contre. Quelle est, en centimètres, la distance entre les centres des deux disques ?



12. Si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions impaires, alors

- (A)  $f + g$  est paire et  $f \cdot g$  est paire ;  
 (B)  $f + g$  est paire et  $f \cdot g$  est impaire ;  
 (C)  $f + g$  est impaire et  $f \cdot g$  est paire ;  
 (D)  $f + g$  est impaire et  $f \cdot g$  est impaire ;  
 (E)  $f + g$  est impaire mais on ne peut pas conclure pour  $f \cdot g$ .

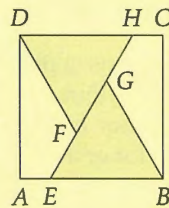
13. *Sans réponse préformulée* — Considérons le polyèdre convexe dont les six sommets sont parmi les sommets d'un cube, les deux sommets ignorés du cube étant opposés. Combien de faces possède ce solide ?

14. Si  $a = \sqrt{2}$ ,  $b = \sqrt[3]{3}$ ,  $c = \sqrt[4]{5}$  et  $d = \sqrt[5]{6}$ , alors

- (A)  $a < b < c < d$                       (D)  $b < a < d < c$   
 (B)  $a < c < b < d$                       (E)  $d < c < a < b$   
 (C)  $d < c < b < a$

15. *Sans réponse préformulée* — Un nombre *autodescriptif* est un nombre dont le premier chiffre en partant de la gauche indique le nombre de chiffres 0 qui le composent ; le deuxième chiffre indique le nombre de chiffres 1 qui le composent ; le troisième chiffre indique le nombre de chiffres 2 qui le composent et ainsi de suite jusqu'au dernier chiffre. Ainsi 1210 est un nombre autodescriptif car il contient un chiffre 0, deux chiffres 1, un chiffre 2 et zéro chiffre 3. Que vaut la somme des chiffres d'un nombre autodescriptif à 10 chiffres ?

16. On construit, à l'intérieur du carré  $ABCD$ , les deux triangles équilatéraux isométriques  $EBG$  et  $HDF$  tels que  $E, F, G$  et  $H$  sont alignés. Si l'aire du carré est de  $16 \text{ cm}^2$ , quelle est, en centimètres carrés, l'aire de la réunion de ces deux triangles ?



- (A)  $\frac{4}{3}(3 + 2\sqrt{3})$                       (D)  $1 + 2\sqrt{3}$   
 (B)  $\frac{1}{2}(1 + 2\sqrt{3})$                       (E)  $\frac{4}{3}(1 + 2\sqrt{3})$   
 (C)  $\frac{2}{3}(1 + 2\sqrt{3})$

17. *Sans réponse préformulée* —  $N = 99 + 999 + 9999 + \dots + 999\dots 999$  où le dernier nombre s'écrit avec 100 fois le chiffre 9. Quel est le nombre de chiffres 1 dans  $N$  ?

18. Dans ma ville, il y a 4 boulangeries qui ferment toutes un des 7 jours de la semaine. Combien y a-t-il de façons d'attribuer un jour de fermeture à chacune si, chaque jour, une boulangerie au moins doit être ouverte ?

- (A) 49                      (B) 343                      (C) 840                      (D) 2394                      (E) 2401

19. *Sans réponse préformulée* — Combien y a-t-il de facteurs 2 dans la décomposition de  $100!$  en facteurs premiers ?

20. Quel que soit le réel  $\alpha$  non multiple de  $\pi/4$ ,  $\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha =$

- (A) 1                      (B)  $\frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$                       (C)  $\frac{1 + \tan^2 \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$                       (D)  $\frac{1 - \cot^2 \alpha}{1 + \cot^2 \alpha}$                       (E)  $\frac{1 + \cot^2 \alpha}{1 - \cot^2 \alpha}$

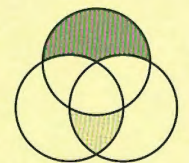
21. Soit  $r$  un réel non nul. Le polynôme du second degré  $P$  admet les deux racines  $r$  et  $2r$  ; le polynôme du second degré  $Q$  admet les deux racines  $2r$  et  $3r$  ; leur différence  $D = P - Q$  admet les deux racines  $2r$  et  $4r$ . Quelles sont les racines de leur somme  $S = P + Q$  ?

- (A)  $2r$  et  $6r$                       (B)  $2r$  et  $5r$                       (C)  $2r$  et  $\frac{5}{2}r$                       (D)  $2r$  et  $-\frac{5}{2}r$                       (E)  $2r$  et  $-6r$

22. Soit  $x$  et  $y$  deux nombres réels tels que  $x + y = 60$ . Quelle est la valeur minimale de  $\sqrt{x^2 + y^2}$  ?

- (A) 0                      (B) 42                      (C)  $20\sqrt{3}$                       (D)  $30\sqrt{2}$                       (E)  $12\sqrt{6}$

23. Dans la figure ci-contre, le centre de chacun des cercles est l'un des points d'intersection des deux autres. Que vaut le rapport de l'aire de la surface coloriée en gris foncé à l'aire de la surface coloriée en gris clair ?



- (A) 2                      (B)  $\frac{5}{2}$                       (C)  $\pi$                       (D)  $\frac{\pi + 3\sqrt{3}}{\pi}$                       (E)  $\frac{\pi + 2\sqrt{3}}{3}$

24. *Sans réponse préformulée* — Si  $x + \frac{1}{x} = 4$ , que vaut  $x^5 + \frac{1}{x^5}$  ?

25. *Sans réponse préformulée* — Dans un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit mesurent 24 et 60, est inscrit un rectangle dont un côté est contenu dans l'hypoténuse. Quelle est la valeur maximale de l'aire de ce rectangle ?

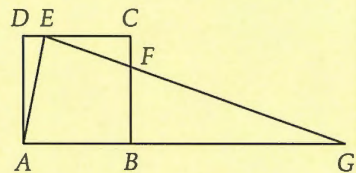
26. *Sans réponse préformulée* — Soit

$$f(x) = 32 + 16x + 32x^2 + 16x^3 + 32x^4 + 16x^5 + 32x^6 + \dots,$$

pour toutes les valeurs de  $x$  où cette somme d'une infinité de termes existe et a une valeur finie. Que vaut  $f(1/7)$  ?

27. *Sans réponse préformulée* — Une ficelle, longue de 89 cm, est fixée à ses extrémités par deux clous distants de 65 cm. Cette ficelle, tendue, matérialise les deux côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle. Quelle est, en centimètres carrés, l'aire de ce triangle rectangle ?

28. *Sans réponse préformulée* — Dans la figure (imprécise) ci-contre,  $ABCD$  est un carré et  $AGE$  un triangle isocèle en  $G$ . De plus,  $|BF| = 2|CF|$ . Que vaut la tangente de l'angle  $\widehat{BAE}$  ?



29. Les côtés d'un triangle ont des longueurs toutes différentes. Deux de ses médianes ont pour longueurs 3 et 6. Son aire vaut  $3\sqrt{15}$ . Quelle est la longueur de la troisième médiane ?

- (A) 7      (B) 8      (C)  $6\sqrt{2}$       (D)  $6\sqrt{3}$       (E)  $3\sqrt{6}$

30. *Sans réponse préformulée* — Quatre voitures roulent sur la même route, chacune avec sa propre vitesse constante. La Mercedes dépasse la Ferrari à 13 h 00 puis croise la Porsche à 14 h 00 et la BMW à 15 h 00. Cette dernière croise la Ferrari à 15 h 30 et dépasse la Porsche à 16 h 00. Combien de minutes avant minuit la Porsche croise-t-elle la Ferrari ?

Les participants sélectionnés pour la finale recevront par l'intermédiaire de leur école une fiche qu'ils devront compléter. Le jour de la finale, ils se muniront de cette fiche ainsi que de leur carte d'identité.