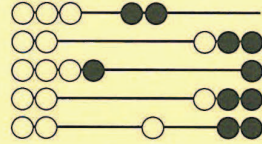




**OLYMPIADE
MATHÉMATIQUE BELGE**



Quarante-septième Olympiade Mathématique Belge
Organisée par la Société Belge des Professeurs de Mathématique
Maxi demi-finale 2022

INSTRUCTIONS

- N'ouvrez pas ce livret avant le signal de votre professeur.
- Vous indiquerez vos réponses au verso de cette page.
- Ce questionnaire contient 30 questions ; répondez à 5 questions au moins.
- Quinze questions sont à choix multiple. Chacune est suivie de réponses désignées par (A), (B), (C), (D) et (E). Chaque question possède une seule réponse correcte. Décidez quelle est la réponse correcte parmi les cinq proposées et retenir la lettre majuscule correspondante. Sur la feuille réponse, écrivez cette lettre dans le cercle situé à droite du numéro de la question.
EXEMPLE : si vous estimez que la réponse correcte à la question numéro 17 est celle précédée de la lettre (D), vous écrivez D sur la feuille réponse, à droite du numéro 17, dans le cercle.
- Quinze questions sont sans réponses préformulées. Dans ce cas, la réponse correcte est un nombre entier dans [0;999]. C'est ce nombre que vous écrivez dans la case rectangulaire de la feuille réponse.
- RÈGLES DE COTATION :** Vous recevez 5 points par réponse correcte, 2 points par abstention et 0 point par réponse fausse. Avec ce système, deviner fera en moyenne diminuer votre score. Vous n'avez intérêt à deviner que si vous avez au moins une chance sur deux de bien choisir.
- Reportez les réponses au fur et à mesure que vous les obtenez. Écrivez au crayon (si vous changez d'avis, gomez la réponse). Du papier de brouillon, du papier millimétré, une règle, un compas, une gomme peuvent être utilisés. Les calculatrices et règles à calcul ne sont pas autorisées, de même que les livres et les notes personnelles.
- Au signal de votre professeur, détachez la feuille de couverture sans déchirer le questionnaire, retournez-la, couvrez-en les questions, puis inscrivez les informations demandées.
- Quand votre professeur vous l'indiquera, commencez le travail sur les problèmes. Vous disposez de 90 minutes.

Mercredi 16 mars 2022

À REMPLIR PAR L'ÉLÈVE (en majuscules)

Nom :

Prénom :

Classe :

Adresse privée

Rue et n° :

Code postal et localité :

École

Nom (sans abréviations) :

Adresse

Rue et n° :

Code postal et localité :

CADRE RÉSERVÉ AU PROFESSEUR

Chaque réponse correcte a une valeur de 5 points et chaque abstention a une valeur de 2 points ; rien n'est déduit pour une réponse fausse. Le score total est calculé en prenant 5 fois le nombre de réponses correctes et en ajoutant 2 fois le nombre d'abstentions.

Réponses correctes : × 5 =

Abstentions : × 2 =

Score total :

1	<input type="text"/>
2	<input type="text"/>
3	<input type="radio"/>
4	<input type="radio"/>
5	<input type="radio"/>
6	<input type="text"/>
7	<input type="text"/>
8	<input type="text"/>
9	<input type="radio"/>
10	<input type="text"/>
11	<input type="text"/>
12	<input type="radio"/>
13	<input type="text"/>
14	<input type="radio"/>
15	<input type="text"/>
16	<input type="radio"/>
17	<input type="text"/>
18	<input type="radio"/>
19	<input type="radio"/>
20	<input type="radio"/>
21	<input type="radio"/>
22	<input type="radio"/>
23	<input type="radio"/>
24	<input type="text"/>
25	<input type="text"/>
26	<input type="radio"/>
27	<input type="text"/>
28	<input type="text"/>
29	<input type="text"/>
30	<input type="radio"/>

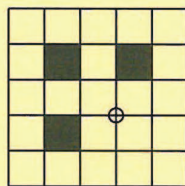
1. *Sans réponse préformulée* — Quel est le nombre entier le plus proche de $\sqrt{2022}$?

2. *Sans réponse préformulée* — Quelle est la 2022^e décimale de l'écriture décimale de $\frac{22}{7}$?

3. Si tous les Martiens ont la peau verte et qu'il existe un être à la peau verte qui chante juste, alors :

- (A) Il existe un Martien qui chante juste ;
- (B) Il existe un Martien qui ne chante pas juste ;
- (C) Tous les Martiens chantent juste ;
- (D) Aucun Martien ne chante juste.
- (E) Aucune des conclusions précédentes ne découle des hypothèses.

4. Le sol d'une cave, représenté ci-contre, est pavé de carreaux de forme carrée, excepté aux trois endroits indiqués en noir, où une colonne carrée s'élève jusqu'au plafond. Le cercle indique la position d'une lampe. Quelle est l'aire de la surface au sol qui est éclairée par cette lampe (aire mesurée en nombre de carreaux)?



- (A) 7,5
- (B) 13
- (C) 14
- (D) 14,5
- (E) 17

5. Soit $A(x) = x^6 - 7x^5 + 10x^4 + 5x^3 - 23x^2 + 5$ et $B(x) = x^3 - 5x^2 + 1$. Si $A(x) = B(x) \cdot Q(x) + R(x)$ représente la division euclidienne de $A(x)$ par $B(x)$, alors :

- (A) Le coefficient de x^2 dans $Q(x)$ est 0 ;
- (B) Le coefficient de x dans $Q(x)$ est 0 ;
- (C) Le terme indépendant de $Q(x)$ est 5 ;
- (D) Le coefficient de x dans $R(x)$ est 1 ;
- (E) Le terme indépendant de $R(x)$ est 5.

6. *Sans réponse préformulée* — Un tour de circuit de 10 km a été effectué à la vitesse moyenne de 100 km/h. Les 5 premiers kilomètres ont été parcourus avec une vitesse de 150 km/h. À quelle vitesse, en kilomètres par heure, ont été effectués les 5 derniers kilomètres?

7. *Sans réponse préformulée* — L'aire d'une face d'un cube vaut 27. Quel est le diamètre de la sphère circonscrite au cube (c'est-à-dire la sphère passant par ses huit sommets)?

8. *Sans réponse préformulée* — Sur un quadrillage 5 fois 5 (de 25 cases donc), Hypatie dispose des pièces rectangulaires qui recouvrent chacune 2 cases, sans déborder. Les pièces rectangulaires *ne* se touchent pas, même en leurs coins. Quel est le nombre maximal de pièces qu'elle peut ainsi placer?

9. La somme d'une infinité de termes $10 - \frac{10}{3} + \frac{10}{9} - \frac{10}{27} + \frac{10}{81} - \dots$ vaut :

- (A) $\frac{20}{3}$
- (B) $\frac{15}{2}$
- (C) $\frac{15}{4}$
- (D) 9
- (E) 6

10. *Sans réponse préformulée* — Quel est le degré minimum d'un polynôme $P(x)$ satisfaisant les trois conditions suivantes :

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = -\infty$;
- 2 et 3 sont des racines de $P(x)$;
- $P(x)$ admet un maximum en $x = 4$.

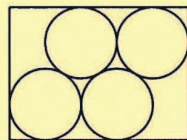
11. *Sans réponse préformulée* — Dans le triangle ABC , A' est le milieu de $[BC]$ et E est le point d'intersection de la bissectrice de \widehat{ABC} avec $[AC]$. Les segments $[AA']$ et $[BE]$ se coupent perpendiculairement en M ; $|A'B| = 13$ et $|A'M| = 5$. Que vaut l'aire du triangle $AA'C$?

12. Dans le demi-cercle de diamètre $[AB]$ est inscrit un carré $IJKL$, avec les sommets I et J sur le segment $[AB]$. Que vaut le rapport de l'aire du carré à l'aire du demi-disque?

- (A) $\frac{8}{\pi}$
- (B) $\frac{8}{5\pi}$
- (C) $\frac{\sqrt{2}}{\pi}$
- (D) $\frac{2\sqrt{5}}{3\pi}$
- (E) $\frac{3}{2\pi}$

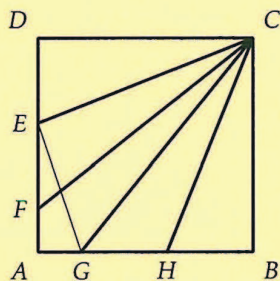
13. *Sans réponse préformulée* — Si n désigne un nombre naturel non nul, combien existe-t-il de valeurs de n pour lesquelles $\frac{n}{40-n}$ désigne aussi un nombre naturel?

14. Sur la figure ci-dessous, les cercles, de même rayon, sont tangents l'un à l'autre ainsi qu'aux côtés du rectangle. Que vaut le rapport de la longueur du rectangle à sa largeur ?



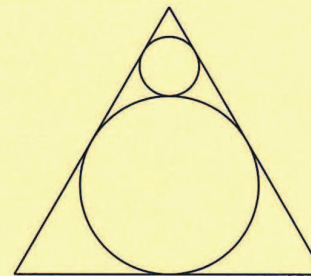
- (A) $\frac{4}{3}$ (B) $\frac{5}{4}$ (C) $\frac{2+\sqrt{3}}{5}$ (D) $5(2-\sqrt{3})$ (E) Une autre réponse
15. *Sans réponse préformulée* — Le polynôme du second degré $P(x)$ admet les deux racines distinctes $-r$ et r . Si $P(0) = -18$ et $P(6) = 54$, que vaut $P(10)$?

16. Les segments $[CE]$, $[CF]$, $[CG]$ et $[CH]$ partagent le carré $ABCD$ en cinq parties de même aire, comme sur la figure ci-dessous. Que vaut le rapport des longueurs $\frac{|EG|}{|CF|}$?

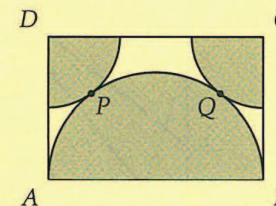


- (A) $\sqrt{\frac{10}{41}}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{5\sqrt{2}}{7}$ (D) $\frac{\sqrt{10}}{7}$ (E) $\frac{\sqrt{34}}{12}$
17. *Sans réponse préformulée* — Le reste de la division d'un nombre naturel n par 143 est 12. Que vaut la somme des restes des divisions de n par 11 et 13 ?

18. Sur la figure ci-dessous, le triangle est équilatéral. Le petit cercle est tangent à deux côtés du triangle ainsi qu'à son cercle inscrit. Que vaut le rapport du rayon du petit cercle au côté du triangle ?



- (A) $\frac{1}{9}$ (B) $\frac{1}{12}$ (C) $\frac{\sqrt{2}}{12}$ (D) $\frac{\sqrt{2}}{18}$ (E) $\frac{\sqrt{3}}{18}$
19. Parmi les nombres suivants, lequel est le plus grand à diviser la somme $1^3 + 3^3 + 5^3 + 7^3 + 9^3 + 11^3$?
- (A) 12 (B) 16 (C) 24 (D) 27 (E) 42
20. Sur la figure ci-dessous, $ABCD$ est un rectangle tel que $|AB| = 3$ et $|BC| = 2$. Le demi-cercle de diamètre $[AB]$ est tangent aux quarts de cercles de centres C et D en Q et P respectivement. Que vaut l'aire de la surface ombrée ?



- (A) $\frac{5}{3}\pi$ (B) $\frac{13}{8}\pi$ (C) $\sqrt{13}\pi$ (D) $\frac{8}{5}\pi$ (E) $\frac{20}{13}\pi$
21. Le nombre naturel r est le reste de la division d'un nombre naturel par 15. Le carré de r divisé par 15 admet 1 comme reste. Quel est alors l'ensemble des valeurs possibles pour r ?
- (A) $\{1\}$ (B) $\{1, 2\}$ (C) $\{1, 4\}$ (D) $\{1, 4, 11\}$ (E) $\{1, 4, 11, 14\}$

22. Pierre marche à une vitesse de 5 km/h pendant 48 minutes. S'il continuait à cette vitesse, il arriverait avec un retard de 48 minutes à son rendez-vous. Au lieu de cela, il commence ensuite à courir à la vitesse de 13 km/h et arrive avec une avance de 48 minutes. Quelle est la distance totale que Pierre a parcourue?

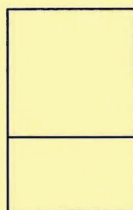
- (A) 16 km (B) 16,5 km (C) 17 km (D) 17,3 km (E) 17,6 km

23. Deux demi-droites de même origine font un angle de 60° . Elles sont tangentes à un cercle de rayon 1 en T et T' . Quelle est l'aire de la surface délimitée par ces deux demi-droites et le petit arc $\widehat{TT'}$?

- (A) $\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$ (B) $2\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$ (C) $\sqrt{3} - \frac{\pi}{6}$ (D) $2\sqrt{3} - \frac{\pi}{6}$ (E) $\sqrt{3}$

24. *Sans réponse préformulée* — Combien existe-t-il de triplets (a, b, c) de réels tels que $ab + 6c = ac + 6b = bc + 6a$ et $a + b + c = 13$?

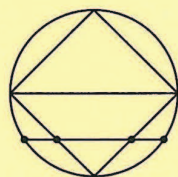
25. *Sans réponse préformulée* — Un rectangle R_1 est découpé en un carré et un rectangle R_2 , comme sur la figure imprécise ci-contre. De la même manière, le rectangle R_2 est découpé en un carré et un rectangle R_3 , le rectangle R_3 est découpé en un carré et un rectangle R_4 , le rectangle R_4 est découpé en un carré et un rectangle R_5 , et le rectangle R_5 est découpé en deux carrés d'un centimètre carré chacun. À chaque étape, la longueur du nouveau rectangle est égale au côté du nouveau carré. Quelle est l'aire du rectangle original R_1 , en centimètres carrés?



26. Un nombre *palindrome* est un nombre qui a la même valeur quel que soit le sens de lecture, par exemple 538 835. Quelle est la somme de tous les nombres palindromes à trois chiffres?

- (A) 4995 (B) 44 955 (C) 49 500 (D) 49 950
(E) Une autre réponse

27. *Sans réponse préformulée* — Un carré est inscrit dans un cercle de rayon 90. Une corde parallèle à une diagonale du carré est partagée en 3 segments par les côtés du carré. Quelle doit être la longueur de cette corde pour que ces 3 segments soient de même longueur? La figure ci-contre est imprécise.



28. *Sans réponse préformulée* — Combien existe-t-il de couples $(a; b)$ d'entiers tels que $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{2}$?

29. *Sans réponse préformulée* — Un ruban de papier collant long de 24 m est enroulé autour d'un noyau cylindrique de 40 mm de diamètre. Le rouleau a un diamètre total de 80 mm. Lorsque son diamètre total se sera réduit à 60 mm, quelle longueur de papier collant, arrondie en mètres, restera-t-il?

30. Le triangle ABC est rectangle en A , $|AB| = 8$ et $|AC| = 6$. La bissectrice de l'angle \widehat{ABC} coupe le cercle inscrit \mathcal{C} en T et en T' tels que $|BT| < |BT'|$. La tangente à \mathcal{C} en T coupe $[AB]$ et $[BC]$ en P et Q respectivement. Que vaut $|PQ|$?

- (A) 3 (B) $2\sqrt{2}$ (C) $\frac{8}{3}$ (D) $\frac{4}{3}(\sqrt{10}-1)$ (E) $\frac{4\sqrt{10}}{5}$

Les participants sélectionnés pour la finale recevront par l'intermédiaire de leur école une fiche qu'ils devront compléter. Le jour de la finale, ils se muniront de cette fiche ainsi que de leur carte d'identité.