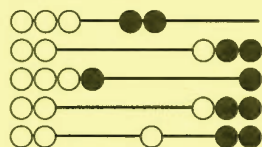




**OLYMPIADE
MATHÉMATIQUE BELGE**



Quarante-huitième Olympiade Mathématique Belge

Organisée par la Société Belge des Professeurs de Mathématique

Maxi demi-finale 2023

INSTRUCTIONS

- N'ouvrez pas ce livret avant le signal de votre professeur.
- Vous indiquerez vos réponses au verso de cette page.
- Ce questionnaire contient 30 questions ; répondez à 5 questions au moins.
- Quinze questions sont à choix multiple. Chacune est suivie de réponses désignées par **(A)**, **(B)**, **(C)**, **(D)** et **(E)**. Chaque question possède une seule réponse correcte. Décidez quelle est la réponse correcte parmi les cinq proposées et retenez la lettre majuscule correspondante. Sur la feuille réponse, écrivez cette lettre dans le cercle situé à droite du numéro de la question.
EXEMPLE : si vous estimez que la réponse correcte à la question numéro 17 est celle précédée de la lettre **(D)**, vous écrirez D sur la feuille réponse, à droite du numéro 17, dans le cercle.
- Quinze questions sont sans réponses préformulées. Dans ce cas, la réponse correcte est un nombre entier dans [0;999]. C'est ce nombre que vous écrirez dans la case rectangulaire de la feuille réponse.
- RÈGLES DE COTATION** : Vous recevez 5 points par réponse correcte, 2 points par abstention et 0 point par réponse fausse. Avec ce système, deviner fera en moyenne diminuer votre score. Vous n'avez intérêt à deviner que si vous avez au moins une chance sur deux de bien choisir.
- Reportez les réponses au fur et à mesure que vous les obtenez. Écrivez au crayon (si vous changez d'avis, gomez la réponse). Du papier de brouillon, du papier millimétré, une règle, un compas, une gomme peuvent être utilisés. Les calculatrices et règles à calcul ne sont pas autorisées, de même que les livres et les notes personnelles.
- Au signal de votre professeur, détachez la feuille de couverture sans déchirer le questionnaire, retournez-la, couvrez-en les questions, puis inscrivez les informations demandées.
- Quand votre professeur vous l'indiquera, commencez le travail sur les problèmes. Vous disposez de 90 minutes.

Mercredi 8 mars 2023

À REMPLIR PAR L'ÉLÈVE (en majuscules)

Nom :

Prénom :

Classe :

Adresse privée

Rue et n° :

Code postal et localité :

École

Nom (sans abréviations) :

Adresse

Rue et n° :

Code postal et localité :

CADRE RÉSERVÉ AU PROFESSEUR

Chaque réponse correcte a une valeur de 5 points et chaque abstention a une valeur de 2 points ; rien n'est déduit pour une réponse fausse. Le score total est calculé en prenant 5 fois le nombre de réponses correctes et en ajoutant 2 fois le nombre d'abstentions.

Réponses correctes : × 5 =

Abstentions : × 2 =

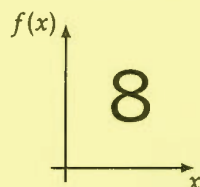
Score total :

1	<input type="text"/>
2	<input type="text"/>
3	<input type="text"/>
4	<input type="text"/>
5	<input type="text"/>
6	<input type="text"/>
7	<input type="text"/>
8	<input type="text"/>
9	<input type="text"/>
10	<input type="text"/>
11	<input type="text"/>
12	<input type="text"/>
13	<input type="text"/>
14	<input type="text"/>
15	<input type="text"/>
16	<input type="text"/>
17	<input type="text"/>
18	<input type="text"/>
19	<input type="text"/>
20	<input type="text"/>
21	<input type="text"/>
22	<input type="text"/>
23	<input type="text"/>
24	<input type="text"/>
25	<input type="text"/>
26	<input type="text"/>
27	<input type="text"/>
28	<input type="text"/>
29	<input type="text"/>
30	<input type="text"/>

1. *Sans réponse préformulée* — Combien de nombres naturels impairs divisent 230?
2. En plus de la longueur nécessaire au nœud, quelle longueur de corde, en centimètres, dois-je prévoir au minimum pour attacher ensemble trois barres cylindriques de 6 cm de diamètre, dont les axes sont parallèles?

(A) $3\pi + 3$ (B) $3\pi + 6$ (C) $6\pi + 6$ (D) $6\pi + 12$ (E) $6\pi + 18$

3. Pour dessiner un 8 d'axe vertical, comme sur la figure ci-dessous, combien de graphes de fonctions faut-il réunir au minimum?



(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

4. *Sans réponse préformulée* — Un millepatte a 500 pattes gauches et 500 pattes droites. Pour être sûr d'avoir de quoi chausser au moins la moitié de ses pattes gauches de chaussures gauches et la moitié de ses pattes droites de chaussures droites, combien doit-il prendre de chaussures dans un tas où 500 chaussures droites et 500 chaussures gauches sont mélangées sans qu'il puisse les distinguer?

5. *Sans réponse préformulée* — Au début d'un match de football, les deux équipes de 11 joueuses sont alignées de part et d'autre des 4 arbitres. À la fin des hymnes nationaux, toutes les joueuses de l'équipe A passent devant les arbitres et devant toutes les joueuses de l'équipe B pour leur taper dans la main. Ensuite, les joueuses de l'équipe B tapent dans la main des arbitres. Combien y a-t-il de tapes dans les mains?

6. *Sans réponse préformulée* — Quelle est la somme de tous les chiffres utilisés pour écrire tous les nombres de 1 à 100 inclus?

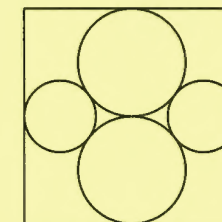
7. Je dispose, en aussi grand nombre que je veux, de cubes $1 \times 1 \times 1$ et de parallélépipèdes $2 \times 1 \times 1$, $3 \times 1 \times 1$, $4 \times 1 \times 1$ et $5 \times 1 \times 1$. À symétrie près, de combien de manières puis-je les assembler afin de former un parallélépipède $5 \times 1 \times 1$? (Explication : à symétrie près signifie que les cubes et parallélépipèdes ne se distinguent que par leur taille, et qu'appliquer une rotation à un cube, un parallélépipède ou un assemblage donne le même assemblage dans le décompte.)

(A) 10 (B) 9 (C) 8 (D) 7 (E) 6

8. *Sans réponse préformulée* — Parmi l'ensemble de nombres entiers $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}$, combien de nombres sont tels que leur carré égale le produit de deux autres nombres de l'ensemble?

9. Sur la figure ci-contre, les 4 cercles sont tangents entre eux et tangents aux côtés du carré de côté 12. Quel est le rayon des petits cercles?

(A) $\frac{5}{2}$ (B) $\sqrt{5}$ (C) 2 (D) $\sqrt{3}$
 (E) $\frac{1 + \sqrt{5}}{3} \pi$



10. *Sans réponse préformulée* — Combien de chiffres distincts apparaissent comme chiffres des dizaines des nombres 6^k avec k naturel plus grand ou égal à 2?

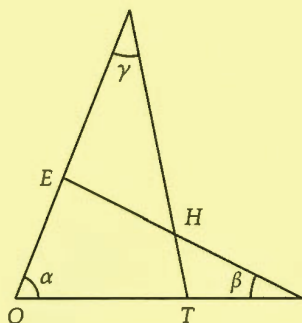
11. Le triangle ABC est rectangle en B , avec $|AB| = 3$ et $|BC| = 4$. Le point M est sur l'hypoténuse et la perpendiculaire à l'hypoténuse par ce point coupe $[BC]$ en P . Si le rapport des aires des triangles ABC et MPC vaut 4, que vaut $|AM|$?

(A) $1/2$ (B) 2 (C) $5/2$ (D) $\sqrt{3/8}$ (E) 3

12. Le polynôme $ax^3 + bx^2 + cx + d$, avec $a \neq 0$, admet parmi ses racines deux réels opposés non nuls r et $-r$, si et seulement si

(A) $ad = bc$ (B) $ad = bc$ et $ac < 0$ (C) $b = d = 0$ (D) $a + d = 0$
 (E) $c = d = 0$

13. Sans réponse préformulée — Dans la figure imprécise ci-dessous, le quadrilatère *THEO* est inscrit dans un cercle, $\beta = 40^\circ$ et $\gamma = 30^\circ$. Quelle est, en degrés, l'amplitude de α ?



14. Un sous-ensemble de $\{1, 2, 3, \dots, 2023\}$ est dit *superpair* si le produit de deux nombres distincts quelconques de ce sous-ensemble est pair. Quel est le plus grand nombre d'éléments d'un sous-ensemble superpair ?

(A) 2 (B) 1011 (C) 1012 (D) 2022 (E) 2023

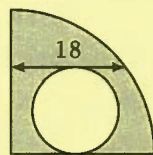
15. Le triangle isocèle *ABC*, dont l'angle au sommet principal *A* a une amplitude de 38° , a un point *M* sur $[BC]$, un point *P* sur $[AB]$ et un point *Q* sur $[AC]$ tels que *MP* et *MQ* sont perpendiculaires et $|MP| = |MQ|$. Quelle est l'amplitude de l'angle \widehat{CQM} ?

(A) 42° (B) 52° (C) 57° (D) 65° (E) 68°

16. Si n est un nombre entier positif non nul, désignons par S_n la somme des 10 premiers multiples non nuls de n . Combien vaut $S_1 + S_2 + \dots + S_{10}$?

(A) 45 (B) 55 (C) 66 (D) 2025 (E) 3025

17. Que vaut l'aire de la zone ombrée dans la figure ci-dessous ?



(A) 324 (B) 162 (C) 324π (D) 162π (E) 81π

18. Sans réponse préformulée — Al Jèbre, Pauline Ohm et Barry Centre courent toujours à des vitesses parfaitement constantes, mais différentes entre elles. S'ils s'affrontent sur 1000 m, Al gagne avec 60 m d'avance sur Pauline et avec 107 m d'avance sur Barry. Combien de mètres d'avance Pauline doit-elle donner à Barry pour franchir avec lui l'arrivée d'une course de 1000 m ?

19. Soit la suite géométrique (t_1, t_2, t_3, \dots) , de premier terme $t_1 \neq 0$ et de raison $q \neq 0$. Notons P_n le produit $t_1 t_2 \dots t_n$ de ses n premiers termes, pour chaque naturel non nul n . Une des suites de signes suivantes ne peut pas être la suite des signes de P_n . Laquelle ?

(A) $(+, -, -, +, +, -, -, +, +, -, \dots)$ (D) $(+, -, +, -, +, -, +, -, +, -, \dots)$
 (B) $(-, +, -, +, -, +, -, +, -, +, \dots)$ (E) $(-, -, +, +, -, -, +, +, -, -, \dots)$
 (C) $(+, +, +, +, +, +, +, +, +, +, \dots)$

20. Parmi toutes les fratries de trois enfants comprenant au moins une fille, quelle est la probabilité que tous les enfants soient des filles, si la naissance d'une fille et celle d'un garçon sont supposées équiprobables ?

(A) $1/8$ (B) $1/7$ (C) $1/6$ (D) $1/5$ (E) $1/4$

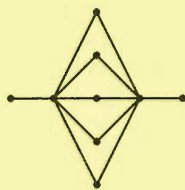
21. Les trois premiers termes d'une suite arithmétique non constante sont p, q, p^2 . Les trois premiers termes d'une suite géométrique sont p, p^2, q . Que vaut p ?

(A) -2 (B) -1 (C) $-\frac{1}{2}$ (D) $-\frac{1}{4}$ (E) $-\frac{1}{8}$

22. La fonction $f(x) = \frac{x^2}{k^2} - \frac{2x}{k}$ est

(A) Positive pour tout réel x et tout k réel non nul ;
 (B) ≥ -1 pour tout réel x et tout k réel non nul ;
 (C) < -1 pour certains réels x et certains k réels non nuls ;
 (D) < -1 pour tout réel x et tout k réel non nul.
 (E) Aucune des propositions précédentes

23. *Sans réponse préformulée* — La figure ci-contre comporte 12 segments. De combien de manières différentes puis-je la dessiner sans lever le crayon ni repasser sur un segment ?



24. *Sans réponse préformulée* — À l'issue d'une course d'orientation, Fatima est arrivée avant Griselda qui est arrivée avant Hélène. De plus, Ismaël est arrivé avant Jean qui est arrivé avant Koffi. Combien existe-t-il de classements de ces six participants, sans ex æquo ?

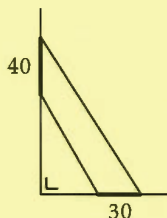
25. *Sans réponse préformulée* — Un cercle est tangent aux quatre côtés d'un trapèze isocèle de bases 12 et 27. Quelle est la hauteur de ce trapèze ?

26. *Sans réponse préformulée* — La division de 2023 par 11 et 12 donne respectivement les restes 10 et 7. Quel est le plus grand nombre inférieur à 1000 possédant cette même propriété ?

27. Dans un triangle ABC , le point P sur $[AB]$ est tel que $|AP| = \frac{1}{4}|AB|$. Le point Q sur $[BC]$ est tel que $[PQ]$ partage le triangle ABC en 2 figures de même aire. Que vaut $\frac{|CQ|}{|CB|}$?

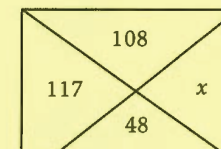
- (A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ (D) $\frac{2}{5}$ (E) Une autre réponse

28. *Sans réponse préformulée* — Deux droites parallèles coupent deux droites perpendiculaires, comme sur la figure ci-contre. Elles déterminent sur celles-ci deux segments mesurant respectivement 30 et 40 mm. Quelle est, en millimètres, la distance entre les droites parallèles ?



29. *Sans réponse préformulée* — Si n est un nombre naturel non nul, la factorielle de n est $n! = n \times (n-1) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$. Combien existe-t-il de nombres à trois chiffres qui soient une somme d'au moins deux factorielles de naturels non nuls distincts ?

30. *Sans réponse préformulée* — Un rectangle est partagé en 4 comme sur la figure ci-dessous, où les proportions ne sont pas respectées. Le nombre indiqué dans chaque partie est son aire. Que vaut x ?



Les participants sélectionnés pour la finale recevront par l'intermédiaire de leur école une fiche qu'ils devront compléter. Le jour de la finale, ils se muniront de cette fiche ainsi que de leur carte d'identité.