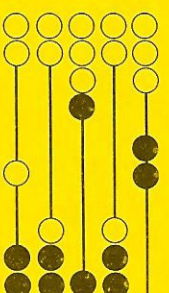


30. Le reste de la division par 7 du nombre $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 2009^3$ est

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 5 (E) 6



OLYMPIADE
MATHÉMATIQUE BELGE



Trente-quatrième Olympiade Mathématique Belge

organisée par la

*Société Belge des Professeurs de Mathématique
d'expression française*

Maxi éliminatoire 2009

INSTRUCTIONS

1. N'ouvrez pas ce livret avant le signal de votre professeur.
2. Vous indiquerez vos réponses au verso de cette page.
3. Ce questionnaire contient 30 questions ; répondez à 5 questions au moins.
4. Vingt-six questions sont à choix multiple. Chaque question possède une seule réponse correcte. Décidez quelle est la réponse correcte parmi les cinq proposées et retenez la lettre majuscule correspondante. Sur la feuille réponse, écrivez cette lettre dans le cercle situé à droite du numéro de la question.
EXEMPLE : si vous estimez que la réponse correcte à la question numéro 17 est celle précédée de la lettre (D), vous écrivez D sur la feuille réponse, à droite du numéro 17, dans le cercle.
5. Quatre questions sont sans réponses préformulées. Dans ce cas, la réponse correcte est un nombre entier dans $[0 ; 999]$. C'est ce nombre que vous écrivez dans la case rectangulaire de la feuille réponse.
6. RÈGLES DE CORRECTION : Vous recevez 5 points par réponse correcte, 2 points par abstention et 0 point par réponse fautive. Avec ce système, deviner fera en moyenne diminuer votre score. Vous n'avez intérêt à deviner que si vous avez au moins une chance sur deux de bien choisir.
7. Reportez les réponses au fur et à mesure que vous les obtenez. Écrivez au crayon (si vous changez d'avis, gomez la réponse). Du papier de brouillon, du papier millimétré, une règle, un compas, une gomme peuvent être utilisés. Les calculatrices et règles à calcul ne sont pas autorisées, de même que les livres et les notes personnelles.
8. Au signal de votre professeur, détachez la feuille de couverture sans déchirer le questionnaire, retournez-la, couvrez-en les questions, puis inscrivez les informations demandées.
9. Quand votre professeur vous l'indiquera, commencez le travail sur les problèmes. Vous disposez de 90 minutes.

Mercredi 14 janvier 2009

À REMPLIR PAR L'ÉLÈVE (en majuscules)

Nom :

Prénom :

Classe :

Adresse privée

Rue et n° :

Code postal et localité :

École

Nom (sans abréviations) :

Adresse

Rue et n° :

Code postal et localité :

CADRE RÉSERVÉ AU PROFESSEUR

Chaque réponse correcte a une valeur de 5 points et chaque abstention a une valeur de 2 points ; rien n'est déduit pour une réponse fautive. Le score total est calculé en prenant 5 fois le nombre de réponses correctes et en ajoutant 2 fois le nombre d'abstentions.

Réponses correctes :

× 5 =

+

Abstentions :

× 2 =

Score total :

- 1
- 2
- 3
- 4
- 5
- 6
- 7
- 8
- 9
- 10
- 11
- 12
- 13
- 14
- 15
- 16
- 17
- 18
- 19
- 20
- 21
- 22
- 23
- 24
- 25
- 26
- 27
- 28
- 29
- 30

25. Deux droites parallèles découpent des segments de 20 cm et 15 cm sur deux droites perpendiculaires. Quelle est, en centimètres, la distance des deux droites parallèles ?

- (A) $6\sqrt{5}$ (B) $5\sqrt{6}$ (C) 12 (D) 15
(E) Cela dépend des positions relatives des quatre droites.

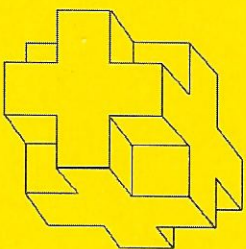
26. Les nombres réels non nuls a , b et c sont tels que $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 6$ et

$$\frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{bc} = 2.$$

Que vaut $\frac{a+b+c}{ab+ac+bc}$?

- (A) 3 (B) $\frac{1}{3}$ (C) 12 (D) $\frac{1}{12}$
(E) Cela dépend des valeurs de a , b , c .

27. Sans réponse préformulée — En chacun des sommets d'un cube, on a enlevé un petit cube de manière à obtenir le solide que voici :



Quel est le nombre total d'arêtes de ce solide ?

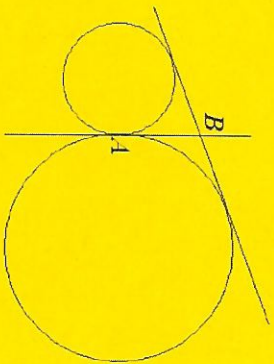
28. Si $|xy^2| = |x^2y|$ avec $x < 0$ et $y > 0$, laquelle des affirmations suivantes est fautive ?

- (A) $x^2y > 0$ (D) $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 0$
(B) $x + y = 0$ (E) $\frac{x}{y} + 1 = 0$
(C) $xy < 0$

29. Si f et g sont deux fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} telles que $f(x) = 3x - 2$ et $g(f(x)) = 3x^2 - 3$, que vaut $g(x)$?

- (A) $\frac{x^2 + 4x - 5}{3}$ (D) $2 + \sqrt{\frac{x}{3}}$
(B) $3 + \sqrt{\frac{x}{3}}$ (E) $3 + \sqrt{\frac{x}{2}}$
(C) $3x + 2$

20. Deux cercles de rayons 1 et 2 sont tangents extérieurement au point A . Le point B est à l'intersection d'une tangente extérieure et de la tangente intérieure communes aux deux cercles. Quelle est la longueur de $[AB]$?



- (A) $\frac{3}{2}$ (B) $\sqrt{2}$ (C) $2\sqrt{2} - 1$ (D) $\sqrt{3}$ (E) 1,6

21. Dans un système d'axes orthonormés, les fonctions f et g de \mathbb{R} dans \mathbb{R} ont des graphiques symétriques par rapport à la droite d'équation $y = 1$. Laquelle des égalités ci-dessous est correcte pour tout x réel ?

- (A) $f(x) - g(x) = 1$ (D) $f(x) + g(x) = 1$
 (B) $f(x) - g(x) = 2$ (E) $f(x) + g(x) = 2$
 (C) $|f(x) - g(x)| = 2$

22. Le polynôme p est tel que $p(x) = ax^5 + bx^3 + cx + 1$ et $p(-2\,009) = -41$. Que vaut $p(2\,009)$?

- (A) 43 (B) 42 (C) 41 (D) 40 (E) -40

23. Si $a^x = (1 - a^{-1})^{-1}$, que vaut $\left(\left((a^x)^x\right)^x\right)^x$?

- (A) $-a$ (B) $\frac{-a^2}{3a+1}$ (C) a (D) 0 (E) $-4 - a$

24. Lorsque le verger compte 20 arbres fruitiers, chaque arbre produit 300 fruits. Chaque fois que l'on plante un arbre supplémentaire, le rendement par arbre diminue de 10 fruits. Combien d'arbres supplémentaires faudra-t-il planter pour que la production du verger soit la plus grande possible ?

- (A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7

1. $9 + 19 + 29 + \dots + 2\,009 =$

- (A) 204 809 (D) 200 809
 (B) 202 809 (E) 201 800
 (C) 202 800

2. Si $2a^{2b} = 8$, que vaut $3a^{4b}$?

- (A) 12 (B) 24 (C) 36 (D) 42 (E) 48

3. Dans une rue, André habite à côté de Bernard, Henri en face de Claude, Éric à côté de François, Daniel à côté d'André, François en face de Daniel et à côté de Henri, Gérard à côté d'Éric. Ces huit personnes habitent dans des maisons différentes. Tu peux en déduire que

- (A) Claude habite à côté de François ;
 (B) Henri habite en face d'André ;
 (C) Éric habite en face de Bernard ;
 (D) Claude habite à côté de Daniel ;
 (E) Gérard habite à côté d'Henri.

4. Parmi les équations suivantes, quelle est celle qui *n'est pas* l'équation d'un cercle de centre $(0,0)$ et de rayon 1 dans un repère orthonormé ?

- (A) $x^2 + y^2 = 1$ (D) $y = \sqrt{1 - x^2}$
 (B) $|x^2 + y^2| = 1$ (E) $\sqrt{x^2 + y^2} = 1$
 (C) $|x|^2 + |y|^2 = 1$

5. Quel est le chiffre des unités du nombre $2^{2009} \cdot 3^{2009} \cdot 6^{2009}$?

- (A) 0 (B) 2 (C) 4 (D) 6 (E) 8

6. Sur une table, on jette trois dés bien équilibrés dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Quelle est la probabilité que les faces supérieures des trois dés indiquent le même nombre de points ?

- (A) $\frac{1}{216}$ (B) $\frac{5}{216}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{1}{36}$ (E) $\frac{1}{18}$

7. Que vaut $\frac{x + x^{-1/2}}{x^{1/3}}$ pour $x = 64$?

- (A) 2 (B) 17 (C) $\frac{513}{32}$ (D) $\frac{32}{513}$ (E) 18

8. *Sans réponse préformulée* — Combien existe-t-il de couples (x, y) de nombres entiers tels que $x^2 \leq 49$ et $0 < y^3 \leq 216$?

9. Dans un triangle rectangle, l'hypoténuse est de longueur h et un côté de l'angle droit est de longueur c . Sachant que la différence entre h et c vaut 1, quelle est la longueur de l'autre côté de l'angle droit ?

- (A) $h - c$
- (B) $\sqrt{h - c}$
- (C) $\sqrt{h + c}$
- (D) $\sqrt{h^2 + c^2}$
- (E) $\frac{1}{h} + \frac{1}{c}$

10. Si $a = \sqrt[3]{2}$, $b = \sqrt[4]{3}$ et $c = \sqrt[5]{6}$, alors

- (A) $a < b < c$
- (B) $a < c < b$
- (C) $b < a < c$
- (D) $c < a < b$
- (E) $c < b < a$

11. Un professeur veut montrer à ses élèves que certains sommets d'un cube sont les sommets de triangles équilatéraux. Pour cela, dans son cube de 30 cm de côté, il relie ces sommets par des fils de couleurs différentes pour chacun de ces triangles. En centimètres, quelle longueur de fil lui sera nécessaire pour délimiter tous les triangles équilatéraux possibles ?

- (A) 24
- (B) $24\sqrt{2}$
- (C) $240\sqrt{2}$
- (D) $720\sqrt{2}$
- (E) $720\sqrt{3}$

12. Si $a + b = p$ et $ab = q$, alors $a^3 + b^3 + a^2b^2 =$

- (A) $p^3 + q^2 - pq$
- (B) $p^3 + q^2 + 3pq$
- (C) $p^3 + q^3$
- (D) $p^3 - q^3$
- (E) $p^3 + q^2 - 3pq$

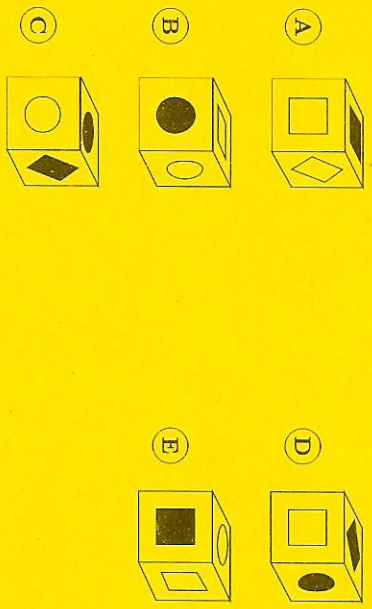
13. *Sans réponse préformulée* — Dans une librairie, sont disponibles sept livres de Molière, cinq d'Agatha Christie et trois de Shakespeare. De combien de manières puis-je en acheter deux de chaque auteur ?

14. *Sans réponse préformulée* — Une suite de sept nombres forme une progression arithmétique. La somme de ces sept nombres vaut 224 et la somme des deux derniers vaut 379. Que vaut la différence du cinquième et du deuxième terme de cette suite ?

15. Paul a collé des étiquettes sur un dé à six faces. Voici trois vues de ce dé.



Parmi les cinq vues suivantes, laquelle représente également le dé de Paul ?



16. La Terre étant assimilée à une sphère dont l'équateur mesure 40 000 km, la longueur, en kilomètres, du parallèle de 60° de latitude Nord vaut

- (A) 10 000
- (B) 20 000
- (C) $10\,000\sqrt{2}$
- (D) $10\,000\sqrt{3}$
- (E) $10\,000\pi$

17. La longueur des côtés de l'hexagone régulier $ABCDEF$ vaut 1. À l'intérieur de cet hexagone, on construit le carré $ABMN$. Quelle est la distance séparant les droites MN et DE ?

- (A) $\sqrt{3} - 1$
- (B) 1
- (C) $\sqrt{2} - 1$
- (D) $\frac{\sqrt{3}}{3}$
- (E) 2

18. Si $n! = n(n-1)(n-2)\dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, alors $\frac{744!}{746! + 745!}$ vaut

- (A) $\frac{747}{746}$
- (B) $\frac{1}{3}$
- (C) 746
- (D) $\frac{744}{3}$
- (E) 744

19. Les nombres entiers a, b, c sont tels que $(a-2009)(b-2009)(c-2009) = 1$. Quelle est la plus petite valeur que peut prendre l'expression $a + b + c$?

- (A) 1
- (B) 6024
- (C) 6026
- (D) 6028
- (E) 6030