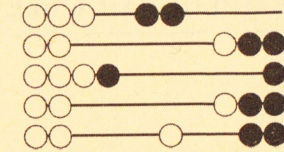




**OLYMPIADE
MATHÉMATIQUE BELGE**



Trente-septième Olympiade Mathématique Belge
Organisée par la Société Belge des Professeurs de Mathématique

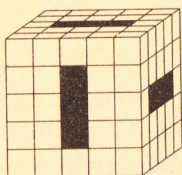
Maxi éliminatoire 2012

INSTRUCTIONS

1. N'ouvrez pas ce livret avant le signal de votre professeur.
2. Vous indiquerez vos réponses au verso de cette page.
3. Ce questionnaire contient 30 questions ; répondez à 5 questions au moins.
4. Vingt-six questions sont à choix multiple. Chacune est suivie de réponses désignées par **(A)**, **(B)**, **(C)**, **(D)** et **(E)**. Chaque question possède une seule réponse correcte. Décidez quelle est la réponse correcte parmi les cinq proposées et retenir la lettre majuscule correspondante. Sur la feuille réponse, écrivez cette lettre dans le cercle situé à droite du numéro de la question.
EXEMPLE : si vous estimez que la réponse correcte à la question numéro 17 est celle précédée de la lettre **(D)**, vous écrirez D sur la feuille réponse, à droite du numéro 17, dans le cercle.
5. Quatre questions sont sans réponses préformulées. Dans ce cas, la réponse correcte est un nombre entier dans $[0; 999]$. C'est ce nombre que vous écrirez dans la case rectangulaire de la feuille réponse.
6. **RÈGLES DE COTATION** : Vous recevez 5 points par réponse correcte, 2 points par abstention et 0 point par réponse fausse. Avec ce système, deviner fera en moyenne diminuer votre score. Vous n'avez intérêt à deviner que si vous avez au moins une chance sur deux de bien choisir.
7. Reportez les réponses au fur et à mesure que vous les obtenez. Écrivez au crayon (si vous changez d'avis, gomez la réponse). Du papier de brouillon, du papier millimétré, une règle, un compas, une gomme peuvent être utilisés. Les calculatrices et règles à calcul ne sont pas autorisées, de même que les livres et les notes personnelles.
8. Au signal de votre professeur, détachez la feuille de couverture sans déchirer le questionnaire, retournez-la, couvrez-en les questions, puis inscrivez les informations demandées.
9. Quand votre professeur vous l'indiquera, commencez le travail sur les problèmes. Vous disposez de 90 minutes.

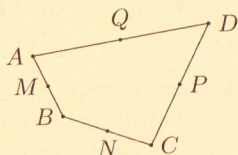
Mercredi 18 janvier 2012

9. Ce solide est un grand cube formé de petits cubes et traversé par trois tunnels. Chaque tunnel va d'une face du grand cube à la face opposée. Combien de petits cubes composent ce solide ?



- (A) 80 (B) 88 (C) 89 (D) 92 (E) 96

10. Les points M , N , P et Q sont les milieux des côtés du quadrilatère $ABCD$. Si l'aire de ce quadrilatère vaut 1, alors la somme des aires des deux triangles AMQ et CPN vaut

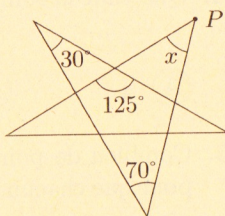


- (A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{1}{5}$ (E) $\frac{1}{6}$

11. Que vaut la somme des nombres entiers de -70 à 50 ?

- (A) -1210 (B) -660 (C) -20 (D) 660 (E) 1210

12. Dans le polygone étoilé ci-dessous, on donne l'amplitude de 3 angles, comme indiqué. Déterminer l'amplitude x de l'angle en P .



- (A) 23° (B) 24° (C) 25° (D) 26° (E) 28°

13. Si $b = 60^\circ$, que vaut $\sin b + \sin 2b + \sin 3b$?

- (A) 0 (B) 1 (C) $\frac{3}{2}$ (D) $\sqrt{3}$ (E) $3\sqrt{3}$

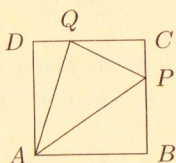
14. Dans la rue Courte, 312 habitants font du tennis, 256 de la pelote basque et 224 du kayak. Si 17 habitants ne font aucun de ces trois sports, 27 font les trois, 92 font juste du tennis et de la pelote basque, 88 ne font que du tennis et 22 que du kayak, combien de personnes habitent la rue Courte ?

- (A) 471 (B) 488 (C) 515 (D) 992 (E) Une autre réponse

15. L'aire totale d'un tétraèdre régulier vaut $324\sqrt{3}$ cm². Quelle est la longueur d'une de ses arêtes ?

- (A) $6\sqrt{3}$ cm (B) 18 cm (C) $12\sqrt{3}$ cm (D) $18\sqrt{3}$ cm (E) 36 cm

16. Dans le carré de côté 3 ci-contre, $|PC| = |QD| = 1$. Que vaut \widehat{AQP} ?



- (A) $9/7$ (B) $\sqrt{2}$ (C) $\sqrt{13}/\sqrt{5}$ (D) 7 (E) 21

17. Soit a , b et c trois réels non nuls. Si l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, d'inconnue réelle x , admet deux solutions, alors l'équation $cx^2 + bx + a = 0$, d'inconnue réelle x , admet

- (A) Deux solutions ;
 (B) Exactement une solution ;
 (C) Aucune solution ;
 (D) Parfois deux solutions, parfois aucune ;
 (E) Parfois deux solutions, parfois une seule.

18. Dix équipes participent à un tournoi. Si chaque équipe affronte exactement une fois chaque autre, combien de matchs seront joués ?

- (A) 36 (B) 45 (C) 55 (D) 90 (E) Une autre réponse

19. *Sans réponse préformulée* — Une suite arithmétique a pour premiers termes 1, 5 et 9. Si la somme de ses termes est de 1540, combien de termes compte-t-elle ?

20. Si $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ est une fonction paire, toutes les suivantes le sont nécessairement aussi, sauf une. Laquelle ?

- (A) $x \mapsto f(3x)$ (D) $x \mapsto f(3-x)$
 (B) $x \mapsto f(|x| + 1)$ (E) $x \mapsto f(-3x)$
 (C) $x \mapsto f(f(x))$

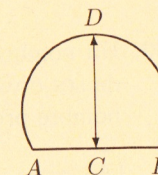
21. Combien de nombres de six chiffres, inférieurs à 300 000, peut-on former avec les chiffres composant le nombre 112223 ?

- (A) 30 (B) 40 (C) 50 (D) 60 (E) 720

22. Une personne est née un 1^{er} janvier dans la première moitié du XIX^e siècle. Durant sa vie, elle aura connu une année dont le numéro valait le carré de son âge à ce moment. En quelle année est-elle née ?

- (A) 1801 (B) 1806 (C) 1825 (D) 1836 (E) 1849

23. *Sans réponse préformulée* — La figure représente la section d'un tunnel routier ; ADB est un arc de cercle. La largeur $|AB|$ de la route est de 6 m et la hauteur $|CD|$ en son milieu est de 7,50 m. Quel est, en centimètres, le rayon de l'arc de cercle ?



24. Soit a et b deux réels non nuls. Si le graphe de f admet le point (a, b) pour centre de symétrie, l'une des fonctions suivantes est impaire. Laquelle ?

- (A) $x \mapsto f(x - a) + b$ (D) $x \mapsto f(a + x) + b$
 (B) $x \mapsto f(x - a) - b$ (E) $x \mapsto f(a + x) - b$
 (C) $x \mapsto f(a - x) + b$

25. *Sans réponse préformulée* — À partir de quel nombre d'élèves une classe permet-elle de former strictement plus de sélections d'une équipe de football que de sélections d'une équipe de basket ? (Une équipe de football est un ensemble de 11 élèves et une équipe de basket un ensemble de 5 élèves.)

26. Le graphe de l'une des fonctions suivantes rencontre la première bissectrice des axes en un point exactement. Laquelle ?

- (A) $x \mapsto 1 - 2|x - 1|$ (D) $x \mapsto 2 + 2|x - 1|$
 (B) $x \mapsto 2 - 2|x - 1|$ (E) $x \mapsto 2|x - 1|$
 (C) $x \mapsto 1 - |x - 1|$

27. Parmi les solutions de l'équation $\sin x = \cos x$, d'inconnue réelle x , combien appartiennent à l'intervalle $[0; 10]$?

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

28. Par combien de zéros se termine l'écriture décimale de $99!/10^{12}$ (où $n! = n \cdot (n - 1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$) ?

- (A) 0 (B) 7 (C) 10 (D) 12
 (E) Aucune des réponses précédentes

29. Que vaut la somme des inverses des racines du polynome

$$X^4 - 10X^3 + 25X^2 - 36$$

- (A) -10 (B) 0 (C) 1/10 (D) 10 (E) 12

30. Un nombre naturel non nul est *multiplicativement parfait* si le produit de ses diviseurs est égal à son carré. Soit n un naturel non nul et p un nombre premier ; p^n est multiplicativement parfait si et seulement si

- (A) vrai ; (B) $p = 2$; (C) $n > 2$; (D) $n = 3$; (E) faux.

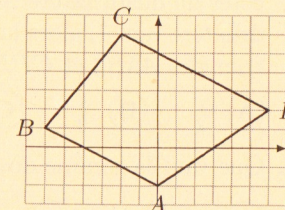
1. $\frac{(20,12)^2}{2,012 \times 201,2} =$

- (A) 0,01 (B) 0,1 (C) 1 (D) 10 (E) 100

2. Dans mon porte-monnaie se trouvent 12 pièces de 1 centime, 21 de 2 centimes, 7 de 5 centimes et 8 de 10 centimes. Combien de pièces au minimum dois-je en extraire pour être certain d'avoir parmi elles une pièce valant plus de 3 centimes ?

- (A) 12 (B) 13 (C) 33 (D) 34 (E) 48

3. *Sans réponse préformulée* — Évaluer l'aire du quadrilatère $ABCD$ représenté ci-contre, si le carré du quadrillage est l'unité d'aire.



4. Que vaut la somme des solutions des deux équations

$$x^2 + 12x - 5 = 0 \text{ et } x^2 - 12x - 7 = 0 ?$$

- (A) 4 (B) 2 (C) 0 (D) -1 (E) -2

5. Combien de points au minimum faut-il choisir sur la surface d'un cube pour que chacune des faces du cube contienne au moins un de ces points ?

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 6

6. Combien y a-t-il de nombres rationnels strictement compris entre 0,499 et 0,4999 ?

- (A) Aucun (B) Un (C) Deux (D) Dix (E) Une infinité

7. Si A, B, C sont les mesures en degrés des angles d'un triangle, lesquelles des affirmations suivantes sont *fausses* ?

- (1) $A + B + C = 180^\circ$
 (2) $\sin(A + B + C) = 0$
 (3) $\sin(A + B) = \sin C$

- (A) (1) (B) (2) (C) (3) (D) (1) et (2) (E) Aucune

8. Si f et g sont les deux fonctions réelles définies par $f : x \mapsto 2x^2 + 6$ et $g : x \mapsto 6/x$, que vaut $f(g(2))$?

- (A) 3/7 (B) 2 (C) 56/9 (D) 14 (E) 24

À REMPLIR PAR L'ÉLÈVE (en majuscules)

Nom :

Prénom :

Classe :

Adresse privée

Rue et n° :

Code postal et localité :

École

Nom (sans abréviations) :

Adresse

Rue et n° :

Code postal et localité :

CADRE RÉSERVÉ AU PROFESSEUR

Chaque réponse correcte a une valeur de 5 points et chaque abstention a une valeur de 2 points ; rien n'est déduit pour une réponse fausse. Le score total est calculé en prenant 5 fois le nombre de réponses correctes et en ajoutant 2 fois le nombre d'abstentions.

Réponses correctes : × 5 =

Abstentions : × 2 =

Score total :

- 1
- 2
- 3
- 4
- 5
- 6
- 7
- 8
- 9
- 10
- 11
- 12
- 13
- 14
- 15
- 16
- 17
- 18
- 19
- 20
- 21
- 22
- 23
- 24
- 25
- 26
- 27
- 28
- 29
- 30