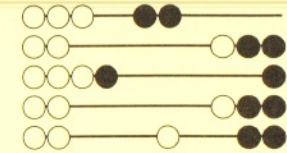




**OLYMPIADE  
MATHEMATIQUE BELGE**



**Trente-huitième Olympiade Mathématique Belge**  
*Organisée par la Société Belge des Professeurs de Mathématique*

**Maxi éliminatoire 2013**

**INSTRUCTIONS**

1. N'ouvrez pas ce livret avant le signal de votre professeur.
2. Vous indiquerez vos réponses au verso de cette page.
3. Ce questionnaire contient 30 questions ; répondez à 5 questions au moins.
4. Vingt-six questions sont à choix multiple. Chacune est suivie de réponses désignées par **A**, **B**, **C**, **D** et **E**. Chaque question possède une seule réponse correcte. Décidez quelle est la réponse correcte parmi les cinq proposées et retenez la lettre majuscule correspondante. Sur la feuille réponse, écrivez cette lettre dans le cercle situé à droite du numéro de la question.  
EXEMPLE : si vous estimez que la réponse correcte à la question numéro 17 est celle précédée de la lettre **D**, vous écrirez D sur la feuille réponse, à droite du numéro 17, dans le cercle.
5. Quatre questions sont sans réponses préformulées. Dans ce cas, la réponse correcte est un nombre entier dans  $[0; 999]$ . C'est ce nombre que vous écrirez dans la case rectangulaire de la feuille réponse.
6. RÈGLES DE COTATION : Vous recevez 5 points par réponse correcte, 2 points par abstention et 0 point par réponse fausse. Avec ce système, deviner fera en moyenne diminuer votre score. Vous n'avez intérêt à deviner que si vous avez au moins une chance sur deux de bien choisir.
7. Reportez les réponses au fur et à mesure que vous les obtenez. Écrivez au crayon (si vous changez d'avis, gomez la réponse). Du papier de brouillon, du papier millimétré, une règle, un compas, une gomme peuvent être utilisés. Les calculatrices et règles à calcul ne sont pas autorisées, de même que les livres et les notes personnelles.
8. Au signal de votre professeur, détachez la feuille de couverture sans déchirer le questionnaire, retournez-la, couvrez-en les questions, puis inscrivez les informations demandées.
9. Quand votre professeur vous l'indiquera, commencez le travail sur les problèmes. Vous disposez de 90 minutes.

**Mercredi 16 janvier 2013**

**À REMPLIR PAR L'ÉLÈVE (en majuscules)**

Nom :

Prénom :

Classe :

Adresse privée

Rue et n° :

Code postal et localité :

École

Nom (sans abréviations) :

Adresse

Rue et n° :

Code postal et localité :

**CADRE RÉSERVÉ AU PROFESSEUR**

Chaque réponse correcte a une valeur de 5 points et chaque abstention a une valeur de 2 points ; rien n'est déduit pour une réponse fautive. Le score total est calculé en prenant 5 fois le nombre de réponses correctes et en ajoutant 2 fois le nombre d'abstentions.

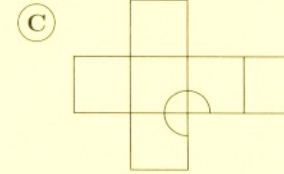
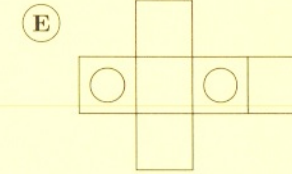
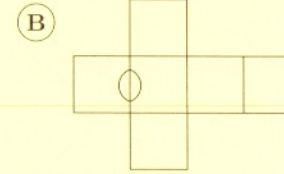
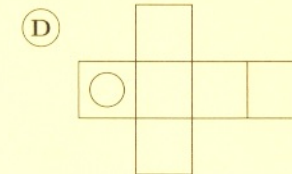
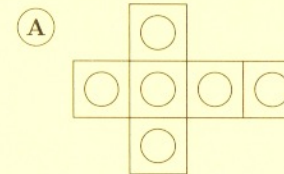
Réponses correctes :  × 5 =

Abstentions :  × 2 =

Score total :

- 1
- 2
- 3
- 4
- 5
- 6
- 7
- 8
- 9
- 10
- 11
- 12
- 13
- 14
- 15
- 16
- 17
- 18
- 19
- 20
- 21
- 22
- 23
- 24
- 25
- 26
- 27
- 28
- 29
- 30

28. Un seul des cinq développements suivants d'un cube ne figure pas correctement l'intersection de ce cube avec une sphère ; lequel ?



29. *Sans réponse préformulée* — Quel est le plus petit naturel qui a exactement autant de diviseurs que 2013 ?

30. Huit joueurs de tennis souhaitent se répartir en quatre paires en vue de participer à un tournoi de double. Combien existe-t-il de telles répartitions ?

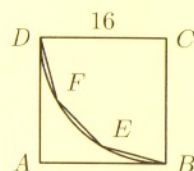
- (A) 70      (B) 105      (C) 1260      (D) 2520      (E) 40 320



21. Combien existe-t-il de couples  $(x, y)$  de nombres entiers qui vérifient la relation  $x^2y^3 = 6^{12}$  ?

- (A) 6      (B) 9      (C) 18      (D) 24      (E) 36

22. Sans réponse préformulée —  $ABCD$  est un carré de côté 16;  $\widehat{BD}$  est un quart de cercle centré en  $C$ , que  $E$  et  $F$  partagent en trois arcs de même amplitude. Quelle est l'aire du pentagone  $ABEFD$  ?



23. Quel est le nombre de solutions du système

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 4 \\ x^4 - y^4 = 16, \end{cases}$$

d'inconnue  $(x, y) \in \mathbf{R}^2$  ?

- (A) 0      (B) 1      (C) 2      (D) 4      (E) Une infinité

24. De combien de manières différentes un rectangle  $6 \times 1$  peut-il être recouvert (sans lacune, chevauchement ni débordement) par des rectangles de taille  $2 \times 1$  et de taille  $1 \times 1$  ? (Cent rectangles de chaque type sont disponibles.)

- (A) 13      (B) 12      (C) 10      (D) 8      (E) 5

25. Les nombres naturels  $A, B, C, D$  et  $E$  satisfont les relations suivantes :

- $B$  est le double de  $A$ ,
- $C$  est le triple de  $B$ ,
- $D$  est le quadruple de  $C$ ,
- $E$  est le quintuple de  $D$ ,
- $E - 7A^2$  vaut 497.

Combien de ces 5 nombres sont pairs ?

- (A) 0      (B) 1      (C) 4      (D) 5

(E) Les informations données ne suffisent pas pour déterminer la réponse.

26. Combien de couples  $(m, n)$  d'entiers vérifient l'inégalité

$$|m - 20| + |n - 13| \leq 3 ?$$

- (A) 16      (B) 23      (C) 25      (D) 28      (E) 36

27. Les médianes  $[AD]$  et  $[CE]$  d'un triangle  $ABC$  se coupent en  $M$  et le milieu de  $AE$  est noté  $N$ . Que vaut le rapport de l'aire du triangle  $ABC$  à celle de  $MNE$  ?

- (A) 6      (B) 8      (C) 9      (D) 12      (E) 16

1.  $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - \dots + 2013 =$

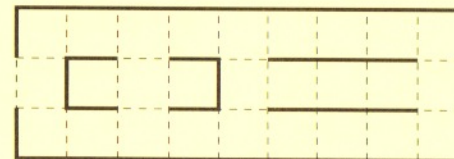
- (A) -1008      (B) 1007      (C) 1006      (D) -19      (E) 1008

2. Un sablier permet de mesurer une durée de trois minutes. Combien de fois faut-il le retourner pour mesurer 2013 minutes ? (La mesure commence avec le sablier au repos, le sable en bas.)



- (A) 2014      (B) 2013      (C) 672      (D) 671      (E) 670

3. Combien de chemins (c'est-à-dire de suites de cases voisines, horizontalement ou verticalement) permettent de traverser le labyrinthe ci-dessous de gauche à droite sans passer deux fois par la même case ni franchir de mur ? (Les murs sont représentés par les traits pleins.)



- (A) 8      (B) 12      (C) 16      (D) 20      (E) 24

4. Dans l'académie de musique de ma petite ville, il existe des violonistes qui ne sont pas pianistes ; mais tous les organistes sont pianistes. Laquelle des propositions suivantes est nécessairement vraie ?

- (A) Il existe des violonistes qui ne sont pas organistes ;  
 (B) Il existe des violonistes qui sont organistes ;  
 (C) Il existe des organistes qui sont violonistes ;  
 (D) Il existe des organistes qui ne sont pas violonistes ;  
 (E) Aucun organiste n'est violoniste.

5. L'une des propositions suivantes est fausse. Laquelle ?

- (A) Le produit de deux fonctions positives est une fonction positive.  
 (B) Le produit de deux fonctions constantes est une fonction constante.  
 (C) Le produit de deux fonctions croissantes est une fonction croissante.  
 (D) Le produit de deux fonctions paires est une fonction paire.  
 (E) Le produit de deux fonctions continues est une fonction continue.

6. Dans une journée (de 24 h), à combien de reprises l'aiguille des heures et l'aiguille des minutes d'une horloge ordinaire forment-elles un angle de  $180^\circ$  ?

- (A) 11      (B) 12      (C) 22      (D) 23      (E) 24



7.  $\left(\frac{4^4 \cdot 3^{16}}{9^8 \cdot 2^7}\right)^6 =$   
 (A) 192 (B) 128 (C) 32 (D) 64/9 (E) Une autre réponse

8. Combien y a-t-il de rectangles dans la figure ci-contre ?

- (A) 4 (B) 9 (C) 12 (D) 30 (E) 36



9. La somme des amplitudes des angles intérieurs d'un polygone régulier vaut douze angles droits. Ce polygone est un

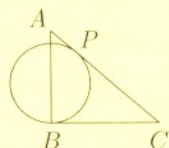
- (A) Carré; (B) Pentagone; (C) Hexagone;  
 (D) Octogone; (E) Décagone.

10. La racine 5<sup>e</sup> de 5<sup>5</sup> vaut

- (A) 5<sup>-5</sup>; (B) 5<sup>5-1</sup>; (C) 5<sup>5</sup>; (D) 5<sup>5<sup>4</sup></sup>; (E) Une autre réponse.

11. *Sans réponse préformulée* — Que vaut le réel  $x$  si  $3^{2x}9^{x+1} = 27^{x+12}$  ?

12. *Sans réponse préformulée* — Un triangle  $ABC$  est rectangle en  $B$ ; un cercle tangent en  $B$  à  $BC$  est aussi tangent à  $AC$ , en  $P$ . Si  $|BC| = 45$  et  $|AP| = 8$ , que vaut l'aire d' $ABC$  ?



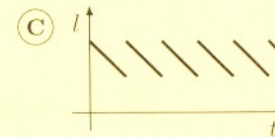
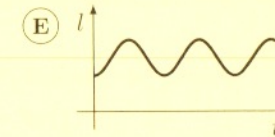
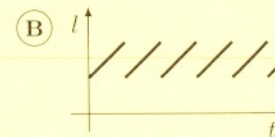
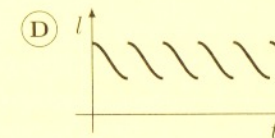
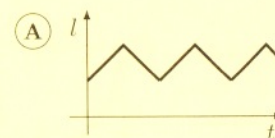
13.  $\sqrt{2013 + 2013\sqrt{2012 + 2012\sqrt{\dots\sqrt{3 + 3\sqrt{2 + 2\sqrt{1}}}}} =$

- (A) 2013 (B) 2012 (C) 2011 (D) 2010 (E) Une autre réponse.

14. Dans une classe de 26 élèves, 6 sont enfants uniques, 13 ont au moins un frère et 14 ont au moins un frère et une sœur. Combien ont au moins un frère et une sœur ?

- (A) 1 (B) 7 (C) 8 (D) 10 (E) 19

15. Lequel des graphiques suivants représente en fonction du temps, de la manière la plus plausible, la longueur des cheveux d'une personne qui passe régulièrement chez le coiffeur pour se faire couper les cheveux toujours de la même manière ?



16. Parmi les nombres suivants, lequel est le plus grand ?

- (A)  $\sqrt{2}$  (B)  $\sqrt[3]{3}$  (C)  $\sqrt[4]{4}$  (D)  $\sqrt[5]{5}$  (E)  $\sqrt[6]{6}$

17. Une fourmi se déplace sur la surface d'un tétraèdre régulier d'arête 1. Quelle est la longueur minimale d'un chemin allant d'un sommet au centre de gravité de la face opposée ?

- (A)  $\frac{3\sqrt{3}}{4}$  (B)  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$  (C)  $1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$  (D)  $\frac{3+\sqrt{2}}{5}$  (E)  $3 - 2\sqrt{2}$

18. Si une fonction  $f$  est telle que  $f(2x - 1) = \frac{10x - 3}{2(2 - x)}$ , que vaut  $f(x + 1)$  ?

- (A)  $\frac{5x + 2}{3 - x}$  (B)  $\frac{5x - 3}{4 - x}$  (C)  $\frac{5x + 7}{2 - x}$  (D)  $\frac{20x - 13}{2(3 - 2x)}$

- (E) Une autre réponse

19. Deux sphères de 13 cm et 15 cm de rayon ont un cercle de 24 cm de diamètre comme intersection. Le centre de la grande sphère est à l'extérieur de la petite. Quelle distance sépare les centres des sphères ?

- (A) 15 cm (B) 14 cm (C) 13 cm (D) 12 cm (E) 11 cm

20. Quel est le chiffre des unités dans l'écriture (décimale) de  $2013^{2013}$  ?

- (A) 1 (B) 3 (C) 6 (D) 7 (E) 9