

Trente-neuvième Olympiade Mathématique Belge
Organisée par la Société Belge des Professeurs de Mathématique

Maxi éliminatoire 2014

INSTRUCTIONS

1. N'ouvrez pas ce livret avant le signal de votre professeur.
2. Vous indiquerez vos réponses au verso de cette page.
3. Ce questionnaire contient 30 questions ; répondez à 5 questions au moins.
4. Vingt-deux questions sont à choix multiple. Chacune est suivie de réponses désignées par **A**, **B**, **C**, **D** et **E**. Chaque question possède une seule réponse correcte. Décidez quelle est la réponse correcte parmi les cinq proposées et retenez la lettre majuscule correspondante. Sur la feuille réponse, écrivez cette lettre dans le cercle situé à droite du numéro de la question.
EXEMPLE : si vous estimez que la réponse correcte à la question numéro 17 est celle précédée de la lettre **D**, vous écrirez **D** sur la feuille réponse, à droite du numéro 17, dans le cercle.
5. Huit questions sont sans réponses préformulées. Dans ce cas, la réponse correcte est un nombre entier dans [0; 999]. C'est ce nombre que vous écrirez dans la case rectangulaire de la feuille réponse.
6. RÈGLES DE NOTATION : Vous recevez 5 points par réponse correcte, 2 points par abstention et 0 point par réponse fautive. Avec ce système, deviner fera en moyenne diminuer votre score. Vous n'avez intérêt à deviner que si vous avez au moins une chance sur deux de bien choisir.
7. Reportez les réponses au fur et à mesure que vous les obtenez. Écrivez au crayon (si vous changez d'avis, gomez la réponse). Du papier de brouillon, du papier millimétré, une règle, un compas, une gomme peuvent être utilisés. Les calculatrices et règles à calcul ne sont pas autorisées, de même que les livres et les notes personnelles.
8. Au signal de votre professeur, détachez la feuille de couverture sans déchirer le questionnaire, retournez-la, couvrez-en les questions, puis inscrivez les informations demandées.
9. Quand votre professeur vous l'indiquera, commencez le travail sur les problèmes. Vous disposez de 90 minutes.

À REMPLIR PAR L'ÉLÈVE (en majuscules)

Nom : _____

Prénom : _____

Classe : _____

Adresse privée
Rue et n° : _____

Code postal et localité : _____

École
Nom (sans abréviations) : _____

Adresse
Rue et n° : _____

Code postal et localité : _____

CADRE RÉSERVÉ AU PROFESSEUR

Chaque réponse correcte a une valeur de 5 points et chaque abstention a une valeur de 2 points ; rien n'est déduit pour une réponse fausse. Le score total est calculé en prenant 5 fois le nombre de réponses correctes et en ajoutant 2 fois le nombre d'abstentions.

Réponses correctes : × 5 =

Abstentions : × 2 =

+

Score total :

30. Soit $ABCD$ un tétraèdre quelconque et π le plan perpendiculaire à CD passant par le milieu B' de $[AB]$. Soit encore C' le milieu de $[AC]$ et D' celui de $[AD]$. Dans ces conditions,
- (A) Le plan π contient toujours l'une des médiatrices du triangle BCD ;
 - (B) Le plan π contient toujours l'une des hauteurs du triangle BCD ;
 - (C) Le plan π contient toujours l'une des médiatrices du triangle $B'C'D'$;
 - (D) Le plan π contient toujours l'une des hauteurs du triangle $B'C'D'$;
 - (E) Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

1

2

3

4

5

6

7

8

9

10

11

12

13

14

15

16

17

18

19

20

21

22

23

24

25

26

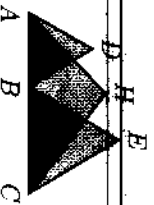
27

28

29

30

24. *ABD* et *BCF* sont deux triangles équilatéraux avec A, B, C alignés, $|AB| = a$ et $|BC| = b$. Si H est le milieu de $[DE]$, quelle est l'aire du triangle AHC ?



- (A) $\frac{\sqrt{3}}{8}(a^2 + b^2)$ (D) $\frac{1}{8}(a^2 + b^2)$
 (B) $\frac{\sqrt{3}}{8}(a + b)^2$ (E) $\frac{1}{8}(a + b)^2$
 (C) $\frac{\sqrt{3}}{4}(a^2 + b^2)$

25. Combien de carrés y a-t-il dans la figure ci-contre, formée de 10×10 petits carrés ?



- (A) 100 (B) 101 (C) 385 (D) 2014 (E) 2025

26. Soit a, b, c et d des nombres réels ; si $f(x) = ax + b$ et $g(x) = cx + d$, l'équation $f(g(x)) = g(f(x))$ admet une solution (au moins)

- (A) Quels que soient a, b, c, d ;
 (B) Si et seulement si $a = c$ et $b = d$;
 (C) Si et seulement si $ad - bc = 0$;
 (D) Si et seulement si $b(1 - c) = d(1 - a)$;
 (E) Si et seulement si $(1 - b)(1 - c) = (1 - a)(1 - d)$.

27. Les triangles ACD et BCD sont rectangles en A et B respectivement. Les points A et B sont distincts, mais situés du même côté de CD . Si $|AC| = |BD| = 3$ et $|AD| = |BC| = 4$, que vaut $|AB|$?

- (A) $7/5$ (B) $9/5$ (C) $18/5$ (D) $\sqrt{2}$ (E) $3\sqrt{14}$

28. *Sans réponse préformulée* — Quel est le plus petit naturel dont la quatrième puissance possède exactement 21 diviseurs naturels ?

29. *Sans réponse préformulée* — Le plan muni d'un repère orthonormé est quadrillé par les droites horizontales d'ordonnées entières et par les droites verticales d'abscisses entières. Deux carrés ont leurs côtés inclus dans ces droites ; le grand a son côté double de celui du petit. Le nombre de noeuds du quadrillage intérieurs au grand carré dépasse de 96 le nombre de noeuds du quadrillage intérieurs au petit carré. (Les points du bord d'un carré n'en sont pas des points intérieurs.) Quel est le côté du petit carré ?

1. *Sans réponse préformulée* — Combien existe-t-il de nombres carrés non nuls inférieurs à 200 et divisibles par 6 ?

2. *Sans réponse préformulée* — Dans une bassecour, le nombre de poules est le triple de celui des canards et le double de celui des lapins. Si le nombre total de pattes est de 112, combien y a-t-il de têtes ?

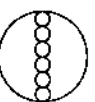
3. De combien de manières peut-on choisir trois nombres distincts dans l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, sans tenir compte de l'ordre, de manière que 5 soit choisi et que la somme vaille 15 ?

- (A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7

4. Lequel de ces nombres est le plus petit ?

- (A) $\frac{2012}{2013}$ (B) $\frac{2013}{2014}$ (C) $\frac{2014}{2015}$ (D) $\frac{2015}{2016}$ (E) $-\frac{2016}{-2017}$

5. Les 7 cercles ci-contre sont tangents entre eux et leurs centres sont alignés ; les 6 petits cercles ont le même rayon. Que vaut le rapport de la circonférence du grand cercle à celle d'un des petits cercles ?

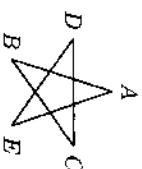


- (A) 4 (B) $2\sqrt{6}$ (C) 5 (D) $4\sqrt{2}$ (E) 6

6. Lorsque la touche x^2 d'une calculatrice est enfoncée, le nombre affiché est remplacé par son carré. Si la calculatrice affiche initialement le nombre 2, quel est le plus petit nombre de pressions sur cette touche qui conduit à l'affichage d'un nombre supérieur à 2014 ?

- (A) 4 (B) 5 (C) 10 (D) 1012 (E) Une autre valeur

7. *Sans réponse préformulée* — Si $ABCDE$ est un pentagone régulier étoilé, que mesure, en degrés, l'angle \widehat{ABC} ?



8. *Sans réponse préformulée* — Pierre a 12 ans. Son père en a 38. Dans combien d'années la somme des âges de Pierre et de son père vaudra-t-elle un siècle ?

9. Deux dés parfaitement équilibrés, à faces numérotées de 1 à 6, sont lancés. Quelle est la valeur la plus probable de la somme des points affichés par ces deux dés ?

- (A) 2 (B) 6 (C) 7 (D) 8 (E) 9

10. Que vaut $\sin 30^\circ$ ($\tan 10^\circ$), $\frac{1}{\tan 10^\circ}$?

- (A) $\frac{3}{2}$ (B) 3 (C) 2 (D) $\frac{1}{3}$ (E) $\frac{1}{2}$

11. L'image du graphique de la fonction $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ par la symétrie centrée à l'origine est toujours le graphique de

- (A) $x \mapsto f(x)$; (D) $x \mapsto -f(-x)$;
 (B) $x \mapsto f(-x)$; (E) Aucune des précédentes.
 (C) $x \mapsto -f(x)$;

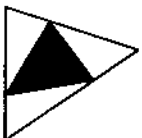
12. Sans réponse préformulée — La somme de deux nombres entiers vaut 18 tandis que la somme de leurs carrés vaut 194. Que vaut leur produit ?

13. D'après mon coéquipier, nous avons perdu tous les matchs déjà joués à l'extérieur durant la présente saison. Pour établir qu'il a tort, il me suffit de mentionner le fait que durant la présente saison,

- (A) Nous avons gagné tous les matchs joués à domicile;
 (B) Nous avons perdu tous les matchs joués à domicile;
 (C) Nous avons perdu au moins un match joué à l'extérieur;
 (D) Nous avons gagné au moins un match joué à l'extérieur;
 (E) Il nous reste à jouer un match à domicile.

14. Les sommets du triangle ombré sont situés aux deux tiers des côtés du grand triangle. Quel est le rapport de l'aire du grand triangle à l'aire du triangle ombré ?

- (A) $\sqrt{5}$ (B) $\sqrt{6}$ (C) 3 (D) 4 (E) 6



15. Quel est le plus petit nombre de couleurs requises pour colorier les sommets d'un cube de sorte que chaque sommet reçoive une couleur et que deux sommets non reliés par une arête reçoivent toujours deux couleurs différentes ?

- (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

16. À l'éliminatoire de l'OMB, chaque concurrent se voit proposer 30 questions; il reçoit 0 point par mauvaise réponse, 2 points par abstention et 5 points par bonne réponse. Quel est le plus grand score qu'il est possible d'obtenir de plusieurs manières ? (Deux manières d'obtenir un score sont différentes si leurs nombres de mauvaises réponses diffèrent ou leurs nombres d'abstentions diffèrent.)

- (A) 135 (B) 136 (C) 137 (D) 138 (E) 139

17. Sans réponse préformulée — Trois côtés consécutifs d'un quadrilatère inscrit à un cercle mesurent, dans l'ordre, 18 cm, 24 cm et 28 cm. Quelle est, en centimètres, la longueur du 4^e côté de ce quadrilatère ?

18. Brigitte invente une opération curieuse sur les nombres : $a \square b = 2 + a + ab$. Que vaut $((2 \square 0) \square 1) \square 4$?

- (A) 0 (B) 6 (C) 52 (D) 2014 (E) Une autre réponse

19. Quel est le volume d'une sphère tangente à chacune des arêtes d'un cube de volume 1 ?

- (A) $\frac{\pi}{6}$ (B) $\frac{4\pi}{3}$ (C) $\frac{\pi\sqrt{3}}{2}$ (D) $4\pi\sqrt{3}$ (E) $\frac{\pi\sqrt{2}}{3}$

20. De combien de manières le nombre 305 peut-il s'écrire comme la somme de deux nombres premiers ?

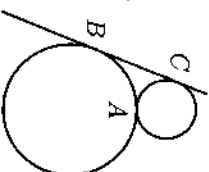
- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) D'au moins quatre manières

21. Le domaine de définition maximal de la fonction $f: x \mapsto \frac{1}{\sqrt{3-2x-x^2}}$ est un intervalle. Quelle en est la longueur ?

- (A) 3 (B) 3,5 (C) 4 (D) 4,5
 (E) Aucune des réponses précédentes

22. Deux cercles de rayons respectifs 8 cm et 18 cm sont tangents extérieurement en A. Quelle est, en centimètres, la longueur du segment [BC] de la tangente commune ?

- (A) 23,5 (B) 24 (C) 24,5 (D) 26 (E) 26,5



23. À un concours, le nombre de candidats a augmenté de 32 % par rapport à l'année dernière; l'année dernière, il y avait 55 % de filles, mais cette année 50 % seulement. Par rapport à l'année dernière, le nombre de filles

- (A) A baissé de 5 %; (D) A augmenté de 20 %;
 (B) Est resté le même; (E) A augmenté de 32 %.
 (C) A augmenté de 11 %;