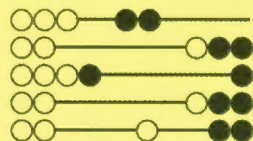




**OLYMPIADE
MATHÉMATIQUE BELGE**



Quarante-deuxième Olympiade Mathématique Belge

Organisée par la Société Belge des Professeurs de Mathématique

Maxi éliminatoire 2017

INSTRUCTIONS

- N'ouvrez pas ce livret avant le signal de votre professeur.
- Vous indiquerez vos réponses au verso de cette page.
- Ce questionnaire contient 30 questions ; répondez à 5 questions au moins.
- Vingt-deux questions sont à choix multiple. Chacune est suivie de réponses désignées par (A), (B), (C), (D) et (E). Chaque question possède une seule réponse correcte. Décidez quelle est la réponse correcte parmi les cinq proposées et retenez la lettre majuscule correspondante. Sur la feuille réponse, écrivez cette lettre dans le cercle situé à droite du numéro de la question.
EXEMPLE : si vous estimez que la réponse correcte à la question numéro 17 est celle précédée de la lettre (D), vous écrirez D sur la feuille réponse, à droite du numéro 17, dans le cercle.
- Huit questions sont sans réponses préformulées. Dans ce cas, la réponse correcte est un nombre entier dans [0;999]. C'est ce nombre que vous écrirez dans la case rectangulaire de la feuille réponse.
- RÈGLES DE COTATION : Vous recevez 5 points par réponse correcte, 2 points par abstention et 0 point par réponse fausse. Avec ce système, deviner fera en moyenne diminuer votre score. Vous n'avez intérêt à deviner que si vous avez au moins une chance sur deux de bien choisir.
- Reportez les réponses au fur et à mesure que vous les obtenez. Écrivez au crayon (si vous changez d'avis, gomez la réponse). Du papier de brouillon, du papier millimétré, une règle, un compas, une gomme peuvent être utilisés. Les calculatrices et règles à calcul ne sont pas autorisées, de même que les livres et les notes personnelles.
- Au signal de votre professeur, détachez la feuille de couverture sans déchirer le questionnaire, retournez-la, couvrez-en les questions, puis inscrivez les informations demandées.
- Quand votre professeur vous l'indiquera, commencez le travail sur les problèmes. Vous disposez de 90 minutes.

Mercredi 18 janvier 2017

À REMPLIR PAR L'ÉLÈVE (en majuscules)

Nom :

Prénom :

Classe :

Adresse privée

Rue et n° :

Code postal et localité :

École

Nom (sans abréviations) :

Adresse

Rue et n° :

Code postal et localité :

CADRE RÉSERVÉ AU PROFESSEUR

Chaque réponse correcte a une valeur de 5 points et chaque abstention a une valeur de 2 points ; rien n'est déduit pour une réponse fausse. Le score total est calculé en prenant 5 fois le nombre de réponses correctes et en ajoutant 2 fois le nombre d'abstentions.

Réponses correctes : × 5 =

Abstentions : × 2 =

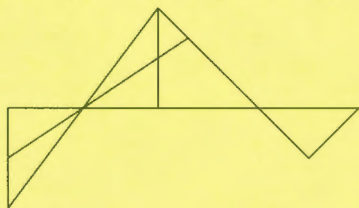
Score total :

1	<input type="radio"/>
2	<input type="radio"/>
3	<input type="radio"/>
4	<input type="radio"/>
5	<input type="text"/>
6	<input type="radio"/>
7	<input type="radio"/>
8	<input type="text"/>
9	<input type="radio"/>
10	<input type="radio"/>
11	<input type="radio"/>
12	<input type="text"/>
13	<input type="radio"/>
14	<input type="radio"/>
15	<input type="text"/>
16	<input type="radio"/>
17	<input type="radio"/>
18	<input type="text"/>
19	<input type="radio"/>
20	<input type="radio"/>
21	<input type="text"/>
22	<input type="radio"/>
23	<input type="radio"/>
24	<input type="radio"/>
25	<input type="radio"/>
26	<input type="text"/>
27	<input type="text"/>
28	<input type="radio"/>
29	<input type="radio"/>
30	<input type="radio"/>

1. Ma note chez l'épicier s'élève à 15,37 €, mais le caissier a compté trois fois le même pamplemousse au prix unitaire de 0,80 € alors que je n'en ai pris qu'un seul. Après rectification, combien dois-je réellement payer ?

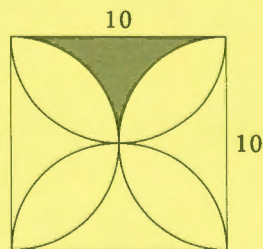
- (A) 12,97 € (B) 13,77 € (C) 14,57 € (D) 16,97 €
 (E) Un autre montant

2. Combien y a-t-il de triangles dans la figure ci-dessous ?



- (A) 7 (B) 11 (C) 12 (D) 13 (E) 14

3. Quel est, à un dixième près, le périmètre de la région ombrée dans la figure ci-dessous ?



- (A) 25,7 (B) 25,9 (C) 26,1 (D) 26,3 (E) 26,5

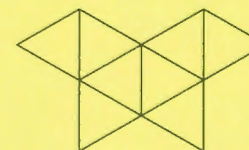
4. Des deux affirmations
S'il pleut, je prends mon parapluie
 et

Si je ne prends pas mon imperméable, alors je ne prends pas mon parapluie,
 il résulte que

- (A) *Si je prends mon parapluie, alors il pleut ;*
 (B) *S'il pleut, je prends mon imperméable ;*
 (C) *Si je prends mon imperméable, alors je prends mon parapluie ;*
 (D) *S'il ne pleut pas, je prends mon imperméable.*
 (E) Aucune des quatre assertions précédentes

5. Sans réponse préformulée — Si $x^2 + 5x + 6 = 20$, que vaut $3x^2 + 15x + 17$?

6. Combien de sommets possède le polyèdre convexe dont voici un développement ?



- (A) 6 (B) 8 (C) 9 (D) 10 (E) 12

7. Dans une classe, tous les élèves apprennent au moins une langue germanique : 17 le néerlandais, 18 l'allemand et 7 les deux. Combien y a-t-il d'élèves dans la classe ?

- (A) 21 (B) 28 (C) 35 (D) 42 (E) Une autre réponse

8. Sans réponse préformulée — La somme des aires de deux carrés vaut 818. Le produit de la diagonale de l'un par la diagonale de l'autre vaut 782. Quelle est la longueur du côté du plus grand carré ?

9. Un professeur calcule la moyenne arithmétique des notes de ses 100 élèves pour une interrogation notée sur 20 points. Laquelle des propositions suivantes est vraie ?

- (A) Si 51 élèves ont obtenu des notes supérieures à 10, alors la moyenne est supérieure à 10.
- (B) Si 50 élèves ont obtenu la note 19, alors la moyenne est supérieure à 10.
- (C) Si la moyenne est supérieure à 10, alors les notes des élèves sont toutes supérieures à 10.
- (D) Si les notes des élèves sont toutes supérieures à 10, alors la moyenne est supérieure à 10.
- (E) Aucune des propositions précédentes n'est vraie.

10. La proposition : « Pour tous réels a et b , $a < b \Rightarrow a^2 > b^2$. » est fausse. Par quoi suffit-il d'y remplacer le mot réels pour obtenir une proposition vraie ?

- (A) Par réels de même signe ;
- (B) Par réels de signes opposés ;
- (C) Par réels positifs ;
- (D) Par réels strictement positifs ;
- (E) Par réels négatifs.

11. Quel est le produit de tous les diviseurs naturels de 144 ?

- (A) 12^8
- (B) 12^{10}
- (C) 12^{15}
- (D) 12^{16}
- (E) 12^{17}

12. Sans réponse préformulée — Pablo lit un livre, dont les pages sont numérotées à partir de 1. À un moment où il est en bas d'une page, en additionnant les numéros des pages qu'il a déjà lues, il obtient 351 ; en additionnant les numéros des pages qu'il lui reste à lire, il obtient 469. Combien ce livre a-t-il de pages ?

13. Soit r et s deux nombres entiers ; $\frac{6^{r+s} \cdot 12^{r-s}}{8^r \cdot 9^{r+2s}}$ est un nombre entier si

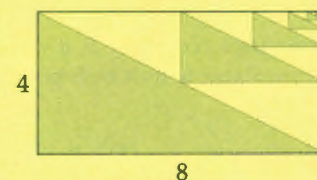
- (A) $s \leq 0$;
- (B) $r \leq 0$;
- (C) $r \geq s$;
- (D) $r+s \leq 0$;
- (E) $r^2 + s^2 \geq 0$.

14. Deux cônes identiques sont posés sur leurs bases. Avec un litre de peinture, je peins la surface latérale du premier et la partie supérieure de celle du second, jusqu'à mi-hauteur. Combien de peinture (en centilitres) me faut-il pour terminer le deuxième cône ?

- (A) 33,333...
- (B) 40
- (C) 60
- (D) 66,666...
- (E) 77,777...

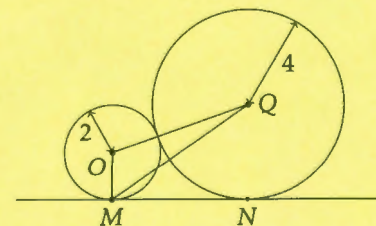
15. Sans réponse préformulée — Si n est un naturel non nul, $n!$ est une abréviation pour $n \cdot (n-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$. Quel est le plus grand facteur premier de $23! - 21!$?

16. On colorie des triangles rectangles comme sur la figure ci-dessous, de manière que les longueurs des côtés de l'angle droit soient divisées par 2 à chaque étape. Quelle est, à 1 % près, la proportion du grand rectangle qui sera coloriée si on poursuit le processus indéfiniment ?



- (A) 80 %
- (B) 75 %
- (C) 72 %
- (D) 70 %
- (E) 67 %

17. Deux cercles de centres O et Q et de rayons respectifs 2 et 4 sont tangents extérieurement ; la droite MN est une de leurs tangentes communes, M et N étant les points de contact. Que vaut l'aire du triangle OQM ?



- (A) 6
- (B) $8 - 2\sqrt{2}$
- (C) $6\sqrt{2} - 2$
- (D) $4\sqrt{2}$
- (E) $3\sqrt{2}$

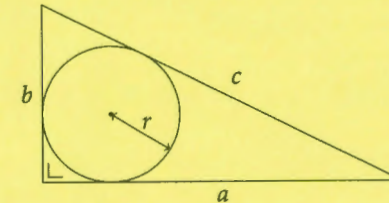
18. Sans réponse préformulée — Un nombre est dit à carrés parfaits si chacun des chiffres qui le composent est un carré parfait. Par exemple 94 est à carrés parfaits, tandis que 54 ne l'est pas. Combien existe-t-il de nombres à carrés parfaits de deux chiffres ?

19. Combien l'équation $7 \sin x + 2 \cos^2 x = 5$, d'inconnue $x \in [0; 2\pi[$, possède-t-elle de solutions ?
 (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4
20. Combien de valeurs entières de x satisfont $0 < x(20 - x) < 75$?
 (A) Aucune (B) 8 (C) 10 (D) 19 (E) Une infinité
21. *Sans réponse préformulée* — La somme des longueurs des trois côtés d'un triangle rectangle vaut 18. La somme des carrés de ces longueurs vaut 128. Que mesure l'aire de ce triangle ?
22. Quatre amis ont apporté chacun un cadeau qu'ils placent dans une corbeille. Ils tirent ensuite au sort pour distribuer les cadeaux. Quelle est la probabilité qu'aucun des quatre amis ne reçoive le cadeau qu'il avait lui-même apporté ?
 (A) $\frac{1}{8}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{3}{8}$ (D) $\frac{5}{12}$ (E) $\frac{1}{2}$
23. Si la fonction f est strictement croissante sur \mathbf{R} , alors l'équation $f(x) = 0$, d'inconnue réelle x ,
 (A) Admet au moins une solution ;
 (B) Admet au plus une solution ;
 (C) Admet exactement une solution ;
 (D) N'admet aucune solution.
 (E) Les informations données sont insuffisantes pour conclure.
24. La droite $y = kx$ et la parabole $y = (x - 1)^2$ ont une intersection non vide si et seulement si :
 (A) $k \geq 0$; (D) $-4 \leq k \leq 0$;
 (B) $k \leq 0$; (E) $k \geq 0$ ou $k \leq -4$.
 (C) $k \geq -4$;
25. Une calotte sphérique a pour diamètre 10 cm et pour profondeur 3 cm. Quel est, en centimètres, le rayon de la sphère dont elle est issue ?
 (A) $\frac{8}{3}$ (B) $\frac{17}{3}$ (C) $\sqrt{34}$ (D) 6 (E) 73

26. *Sans réponse préformulée* — Quel est le plus grand carré parfait qui soit aussi un cube parfait inférieur à 1000 ?

27. *Sans réponse préformulée* — Je possède entre 100 et 200 billes. Si je les partage en 2, il m'en reste une. Si je les partage en 3, il m'en reste 2. Si je les partage en 4, il m'en reste 3. Enfin, je peux les partager exactement en 5. Combien ai-je de billes ?

28. Que vaut r ?



- (A) $\frac{a+b+c}{15}$ (B) $\frac{a+b+c}{12}$ (C) $\frac{2c-a-b}{4}$ (D) $\frac{a+b-c}{2}$
 (E) Aucune des réponses précédentes

29. Dans une finale de 100 m, trois des huit coureurs sont Jamaïcains. Combien y a-t-il de podiums (ordonnés) possibles avec exactement un Jamaïcain ?

- (A) 225 (B) 180 (C) 56 (D) 30 (E) 6

30. Les triangles isocèles ABC et BDE , de sommets principaux C et E , sont semblables. Les points A , B et D sont alignés dans cet ordre et $|AB| = 3|BD|$; C et E sont du même côté de AD et CE coupe AD en F . Quel est le rapport de l'aire du triangle ACF à l'aire du triangle ABC ?

- (A) $\frac{4}{3}$ (B) $\frac{10}{7}$ (C) $\frac{3}{2}$ (D) $\frac{13}{8}$ (E) $\sqrt{3}$