

Quarante-troisième Olympiade Mathématique Belge
Organisée par la Société Belge des Professeurs de Mathématique
Maxi éliminatoire 2018

INSTRUCTIONS

- N'ouvrez pas ce livret avant le signal de votre professeur.
- Vous indiquerez vos réponses au verso de cette page.
- Ce questionnaire contient 30 questions ; répondez à 5 questions au moins.
- Vingt-deux questions sont à choix multiple. Chacune est suivie de réponses désignées par (A), (B), (C), (D) et (E). Chaque question possède une seule réponse correcte. Décidez quelle est la réponse correcte parmi les cinq proposées et retenez la lettre majuscule correspondante. Sur la feuille réponse, écrivez cette lettre dans le cercle situé à droite du numéro de la question.
 EXEMPLE : si vous estimez que la réponse correcte à la question numéro 17 est celle précédée de la lettre (D), vous écrirez D sur la feuille réponse, à droite du numéro 17, dans le cercle.
- Huit questions sont sans réponses préformulées. Dans ce cas, la réponse correcte est un nombre entier dans [0;999]. C'est ce nombre que vous écrirez dans la case rectangulaire de la feuille réponse.
- RÈGLES DE COTATION : Vous recevez 5 points par réponse correcte, 2 points par abstention et 0 point par réponse fausse. Avec ce système, deviner fera en moyenne diminuer votre score. Vous n'avez intérêt à deviner que si vous avez au moins une chance sur deux de bien choisir.
- Reportez les réponses au fur et à mesure que vous les obtenez. Écrivez au crayon (si vous changez d'avis, gomez la réponse). Du papier de brouillon, du papier millimétré, une règle, un compas, une gomme peuvent être utilisés. Les calculatrices et règles à calcul ne sont pas autorisées, de même que les livres et les notes personnelles.
- Au signal de votre professeur, détachez la feuille de couverture sans déchirer le questionnaire, retournez-la, couvrez-en les questions, puis inscrivez les informations demandées.
- Quand votre professeur vous l'indiquera, commencez le travail sur les problèmes. Vous disposez de 90 minutes.

Mercredi 17 janvier 2018

À REMPLIR PAR L'ÉLÈVE (en majuscules)

Nom :

Prénom :

Classe :

Adresse privée

Rue et n° :

Code postal et localité :

École

Nom (sans abréviations) :

Adresse

Rue et n° :

Code postal et localité :

CADRE RÉSERVÉ AU PROFESSEUR

Chaque réponse correcte a une valeur de 5 points et chaque abstention a une valeur de 2 points ; rien n'est déduit pour une réponse fausse. Le score total est calculé en prenant 5 fois le nombre de réponses correctes et en ajoutant 2 fois le nombre d'abstentions.

Réponses correctes :

$$\boxed{} \times 5 = \boxed{}$$

+

Abstentions :

$$\boxed{} \times 2 = \boxed{}$$

Score total :

$$\boxed{}$$

1

2

3

4

5

6

7

8

9

10

11

12

13

14

15

16

17

18

19

20

21

22

23

24

25

26

27

28

29

30

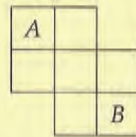
1. Combien de lundis peut-il y avoir au maximum dans une période de 75 jours consécutifs ?

- (A) 10 (B) 11 (C) 12 (D) 13 (E) 15

2. Parmi les nombres suivants, quel est celui qui peut être considéré comme une taille normale pour un participant à l'Olympiade de mathématiques ?

- (A) $0,000017 \times 10^4$ cm (D) 170×10^{-3} m
 (B) $0,017 \times 10^5$ mm (E) $1,7 \times 10^{-4}$ km
 (C) 170000×10^{-7} m

3. Sans réponse préformulée — En se déplaçant de case en case adjacente uniquement vers le bas ou vers la droite, combien de chemins mènent de la case A à la case B ?



4. Bill change 600 dollars en euros au taux de 1,25 \$ par euro. Ayant annulé son voyage, il reconvertit tous ces euros en dollars au nouveau taux de 1,20 \$ par euro. Combien reçoit-il de dollars ?

- (A) 576 (B) 600 (C) 625 (D) 630 (E) 720

5. Audrey a aligné vingt pièces de 0,20 € sur une table. Bernard a alors remplacé une pièce sur quatre, à partir de la 4^e, par une pièce de 0,50 €. Ensuite, Charlotte a remplacé une pièce sur trois, à partir de la 3^e, par une pièce de 1 €. Finalement, David a remplacé une pièce sur six, à partir de la 6^e, par une pièce de 2 €. Quel est maintenant le montant total de la rangée de pièces de monnaie ?

- (A) 10,5 € (B) 12,2 € (C) 13 € (D) 13,5 €
 (E) Une autre réponse

6. Quel est le reste de la division par 15 de $1 + 6 + 11 + 16 + \dots + 96 + 101$?

- (A) 0 (B) 1 (C) 3 (D) 5 (E) 6

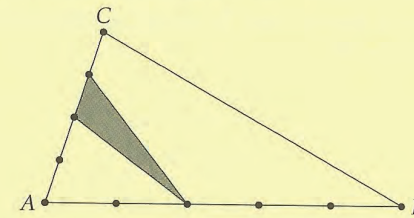
7. Dans sa garde-robe, Pierre a des cravates bleues, des cravates rouges et des cravates vertes. S'il prend 5 de ses cravates au hasard, l'ensemble contiendra toujours au moins une cravate bleue ou au moins une cravate rouge. Quel est, au maximum, le nombre de ses cravates vertes ?

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

8. Parmi les nombres suivants, quel est celui qui n'est pas la somme de quatre nombres entiers consécutifs ?

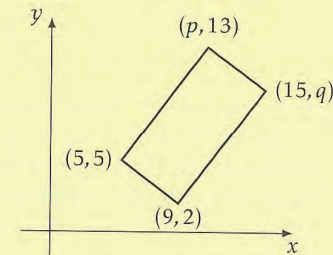
- (A) 425 398 (B) 429 562 (C) 496 244 (D) 876 534 (E) 926 322

9. Dans la figure suivante, les points partagent les côtés sur lesquels ils se trouvent en segments de mêmes longueurs. L'aire du triangle ABC est 180 ; quelle est celle du triangle gris ?



- (A) 9 (B) 18 (C) 27 (D) 36 (E) 45

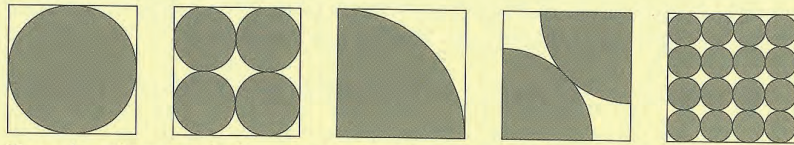
10. La figure ci-dessous est un rectangle ; que vaut $p + q$?



- (A) 17 (B) 18 (C) 20 (D) 21 (E) 22

11. Sans réponse préformulée — Mathieu doit peindre des pions, chacun dans une seule couleur. Il dispose de trois couleurs et a reçu la consigne que chaque couleur doit être attribuée à un quart des pions au moins. Au moment de se mettre au travail, il se rend compte que la consigne est impossible à respecter. Combien a-t-il de pions à peindre, au maximum ?

12. Cinq carrés identiques sont partiellement recouverts par des disques ou des morceaux de disques :



Dans les cinq carrés, la somme des aires des parties ombrées

- (A) Est la même ; (D) Prend 4 valeurs distinctes ;
 (B) Prend 2 valeurs distinctes ; (E) Prend 5 valeurs distinctes.
 (C) Prend 3 valeurs distinctes ;
13. *Sans réponse préformulée* — Pascal (qui vit seul) vide invariablement un tube de dentifrice en 72 jours et un flacon de shampoing en 60 jours ; il use un savon en 40 jours. Aujourd'hui 17 janvier, il entame un nouveau flacon de shampoing alors que son savon et son tube de dentifrice sont exactement à la moitié de leurs existences. Dans combien de jours devra-t-il, pour la première fois à venir, entamer simultanément un nouveau savon, un nouveau tube de dentifrice et un nouveau flacon de shampoing ?

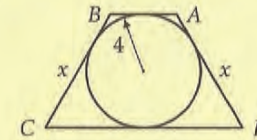
14. La somme de 21 naturels multiples de 3

- (A) Est toujours divisible par 7 et par 9 ;
 (B) Est toujours divisible par 21 mais pas toujours divisible par 9 ;
 (C) N'est pas toujours divisible par 3 ;
 (D) Est toujours divisible par 3 mais pas toujours par 9 ni par 21 ;
 (E) Est toujours divisible par 9 mais pas toujours par 63.
15. Un nombre *palindrome* est un nombre qui est le même quel que soit le sens de lecture, par exemple $A = 20177102$. Quelle est la différence entre le plus petit nombre palindrome strictement supérieur à A et le plus grand nombre palindrome strictement inférieur à A ?
- (A) 10 001 (B) 11 000 (C) 11 011 (D) 22 000 (E) 22 022

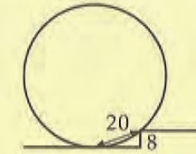
16. L'une des « boîtes noires » d'un avion se trouve par 2000 m de fond. Le signal acoustique qu'elle émet est perceptible par le détecteur approprié jusqu'à 4000 m de distance. Quel est le rayon de la zone circulaire, à la surface de l'océan, d'où il est possible de la repérer ?

- (A) $1000\sqrt{3}$ m (B) $2000\sqrt{2}$ m (C) $2000\sqrt{3}$ m (D) 2000 m (E) 4000 m

17. *Sans réponse préformulée* — L'aire du trapèze isocèle $ABCD$ est 80 et $|AD| = |BC| = x$. Le cercle, de rayon 4, est tangent à ses quatre côtés. Que vaut x ?



18. *Sans réponse préformulée* — Une roue est arrêtée contre une marche de 8 cm de hauteur. La distance entre le point de contact de la roue sur le sol et le nez de la marche est de 20 cm. Quel est, en centimètres, le rayon de la roue ?



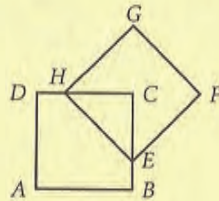
19. Trois amis connaissent chacun un mot secret différent. Ils peuvent partager leurs informations par texto. Combien de textos au minimum devront être envoyés pour que chacun connaisse les trois mots secrets ? (Nous supposons ici qu'un texto ne peut avoir qu'un seul destinataire.)

- (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

20. *Sans réponse préformulée* — Un automobiliste est contrôlé alors qu'il roulait à 250 km/h sur une route où la vitesse est limitée à 70 km/h. Il prétend avoir compris que la limite était à 70 m/s. Selon cette interprétation fantaisiste, à combien de kilomètres par heure sous la limite roulait-il ?

21. *Sans réponse préformulée* — Que vaut $\sqrt{12 + \sqrt{12 + \sqrt{12 + \sqrt{12 + \dots}}}}$?

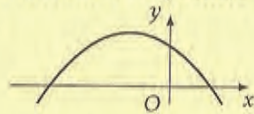
22. Dans la figure ci-dessous, les côtés des carrés $ABCD$ et $EFGH$ sont de longueur 3. Le carré $EFGH$ est centré en C . Quelle est, parmi les suivantes, la meilleure approximation du périmètre de l'heptagone $ABEFGHD$?



- (A) 16 (B) 17 (C) 17,5 (D) 18 (E) 24
23. Deux dés parfaitement équilibrés identiques portent sur leurs faces les nombres 1, 1, 1, 2, 3 et 3. Quelles sont les chances d'obtenir une somme impaire en jetant une fois les deux dés?
- (A) 1 chance sur 36 (D) 1 chance sur 4
 (B) 5 chances sur 36 (E) 25 chances sur 36
 (C) 5 chances sur 18
24. *Sans réponse préformulée* — Les suites arithmétiques $(29, 40, 51, 62, 73, \dots)$ et $(5, 22, 39, 56, 73, \dots)$ ont le terme 73 en commun. Quel est le terme commun suivant?

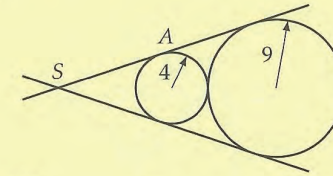
25. Pour combien de nombres naturels n la fraction $\frac{2n^2 - 13n + 15}{n - 3}$ est-elle strictement négative?
- (A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7

26. Si la figure ci-dessous représente la parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$, laquelle des expressions suivantes est positive?



- (A) a (B) bc (C) ab^2 (D) $a - c$ (E) $c - b$

27. Deux cercles de rayons 4 et 9 sont tangents extérieurement. Deux tangentes extérieures aux deux cercles se coupent en S . Quelle est la distance $|SA|$, où A est le point de contact du petit cercle avec une des tangentes extérieures?



- (A) 9 (B) $\frac{48}{5}$ (C) 10 (D) $\frac{52}{5}$ (E) 12

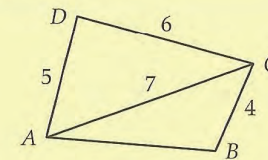
28. Pascal court deux fois plus vite qu'il ne marche, et il fait l'un comme l'autre toujours à la même vitesse. Un jour, en allant à l'école, il marche deux fois plus longtemps qu'il ne court et il met 24 min pour atteindre l'école. Le soir, pour rentrer par le même chemin, il court deux fois plus longtemps qu'il ne marche. Combien de temps (en secondes) met-il alors pour effectuer le retour?

- (A) 864 (B) 1152 (C) 1200 (D) 1728 (E) 1912

29. Combien existe-t-il de couples (m, n) d'entiers tels que $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{6}$?

- (A) 4 (B) 9 (C) 12 (D) 17 (E) 18

30. Dans le quadrilatère $ABCD$, $\widehat{ABC} + \widehat{ADC} = 180^\circ$. Si $|AD| = 5$, $|CD| = 6$, $|AC| = 7$ et $|BC| = 4$, que vaut $|AB|$?



- (A) 5 (B) $\frac{11}{2}$ (C) 6 (D) $\frac{32}{5}$ (E) Il manque des données.