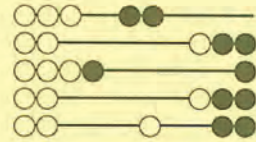




**OLYMPIADE  
MATHÉMATIQUE BELGE**



## Quarante-quatrième Olympiade Mathématique Belge

*Organisée par la Société Belge des Professeurs de Mathématique*

### Maxi éliminatoire 2019

#### INSTRUCTIONS

- N'ouvrez pas ce livret avant le signal de votre professeur.
- Vous indiquerez vos réponses au verso de cette page.
- Ce questionnaire contient 30 questions ; répondez à 5 questions au moins.
- Vingt-deux questions sont à choix multiple. Chacune est suivie de réponses désignées par (A), (B), (C), (D) et (E). Chaque question possède une seule réponse correcte. Décidez quelle est la réponse correcte parmi les cinq proposées et retenez la lettre majuscule correspondante. Sur la feuille réponse, écrivez cette lettre dans le cercle situé à droite du numéro de la question.  
EXEMPLE : si vous estimez que la réponse correcte à la question numéro 17 est celle précédée de la lettre (D), vous écrirez D sur la feuille réponse, à droite du numéro 17, dans le cercle.
- Huit questions sont sans réponses préformulées. Dans ce cas, la réponse correcte est un nombre entier dans [0;999]. C'est ce nombre que vous écrirez dans la case rectangulaire de la feuille réponse.
- RÈGLES DE COTATION : Vous recevez 5 points par réponse correcte, 2 points par abstention et 0 point par réponse fausse. Avec ce système, deviner fera en moyenne diminuer votre score. Vous n'avez intérêt à deviner que si vous avez au moins une chance sur deux de bien choisir.
- Reportez les réponses au fur et à mesure que vous les obtenez. Écrivez au crayon (si vous changez d'avis, gomez la réponse). Du papier de brouillon, du papier millimétré, une règle, un compas, une gomme peuvent être utilisés. Les calculatrices et règles à calcul ne sont pas autorisées, de même que les livres et les notes personnelles.
- Au signal de votre professeur, détachez la feuille de couverture sans déchirer le questionnaire, retournez-la, couvrez-en les questions, puis inscrivez les informations demandées.
- Quand votre professeur vous l'indiquera, commencez le travail sur les problèmes. Vous disposez de 90 minutes.

Mercredi 16 janvier 2019

#### À REMPLIR PAR L'ÉLÈVE (en majuscules)

Nom :

Prénom :

Classe :

Adresse privée

Rue et n° :

Code postal et localité :

École

Nom (sans abréviations) :

Adresse

Rue et n° :

Code postal et localité :

#### CADRE RÉSERVÉ AU PROFESSEUR

Chaque réponse correcte a une valeur de 5 points et chaque abstention a une valeur de 2 points ; rien n'est déduit pour une réponse fausse. Le score total est calculé en prenant 5 fois le nombre de réponses correctes et en ajoutant 2 fois le nombre d'abstentions.

Réponses correctes :  × 5 =

Abstentions :  × 2 =

Score total :

1	<input type="radio"/>
2	<input type="radio"/>
3	<input type="radio"/>
4	<input type="radio"/>
5	<input type="radio"/>
6	<input type="radio"/>
7	<input type="text"/>
8	<input type="radio"/>
9	<input type="radio"/>
10	<input type="radio"/>
11	<input type="radio"/>
12	<input type="text"/>
13	<input type="radio"/>
14	<input type="text"/>
15	<input type="radio"/>
16	<input type="radio"/>
17	<input type="radio"/>
18	<input type="radio"/>
19	<input type="text"/>
20	<input type="radio"/>
21	<input type="radio"/>
22	<input type="radio"/>
23	<input type="radio"/>
24	<input type="radio"/>
25	<input type="text"/>
26	<input type="text"/>
27	<input type="radio"/>
28	<input type="text"/>
29	<input type="text"/>
30	<input type="radio"/>

1. Dans une école, 25 % des filles et 50 % des garçons assistent à un match de football. Si 48 % des élèves de l'école sont des filles, quel est le pourcentage des élèves qui assistent au match ?

- (A) 28 %    (B) 30 %    (C) 32 %    (D) 38 %    (E) 40 %

2. Le mille-pattes possède 1000 chaussettes. Il les a rangées dans un meuble à 3 tiroirs. Quel est le plus grand nombre de chaussettes que contient à coup sûr au moins un des tiroirs ?

- (A) 667    (B) 666    (C) 335    (D) 334    (E) 333

3. Les dix chiffres 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 sont utilisés chacun une seule fois pour écrire cinq nombres à deux chiffres de manière que la moyenne (arithmétique) de ces cinq nombres soit la plus grande possible. Que vaut cette moyenne ?

- (A) 54    (B) 70    (C) 70,2    (D) 72    (E) Une autre valeur

4. Soit  $p$  un réel positif. La différence entre la plus grande et la plus petite des racines de l'équation  $4x^2 - 4px + p^2 - 1 = 0$ , d'inconnue réelle  $x$ , est :

- (A) 0    (B) 1    (C) 2    (D)  $p$     (E)  $p + 1$

5. Six enfants : Aurore, Bilal, Cyril, Dana, Emma et Fred, ont des âges tous différents allant de 8 à 13 ans. Fred a deux ans de plus que Dana. Bilal a un an de moins qu'Emma et un an de plus que Fred. Cyril est le plus jeune. Quel âge a Aurore ?

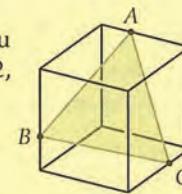
- (A) 9 ans    (B) 10 ans    (C) 11 ans    (D) 12 ans    (E) 13 ans

6. Les trois premiers termes d'une suite géométrique sont  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt[3]{2}$  et  $\sqrt[4]{2}$ . Quel est le quatrième terme ?

- (A) 1    (B)  $\sqrt[7]{2}$     (C)  $\sqrt[8]{2}$     (D)  $\sqrt[9]{2}$     (E)  $\sqrt[10]{2}$

7. Sans réponse préformulée — Si  $f(x) = x^2 - 7x + k$  pour tout  $x$  et si  $f(k) = -9$ , que vaut  $f(-1)$  ?

8. Les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont chacun au tiers d'une arête du cube représenté ci-contre. Si l'arête du cube vaut 12, quelle est l'aire du triangle  $ABC$  ?

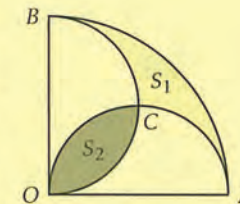


- (A)  $24\sqrt{3}$     (D)  $48\sqrt{2}$   
 (B)  $28\sqrt{3}$     (E)  $56\sqrt{3}$   
 (C)  $48\sqrt{3}$

9. Que vaut  $\frac{1+3+5+\dots+2019}{2+4+6+\dots+2018}$  ?

- (A)  $\frac{2017}{2018}$     (B)  $\frac{2018}{2020}$     (C)  $\frac{1009}{2019}$     (D)  $\frac{1010}{1009}$     (E)  $\frac{1009}{2020}$

10. Les segments  $[OA]$  et  $[OB]$  sont perpendiculaires et de même longueur. Ces deux segments sont les diamètres de deux demi-cercles qui se recoupent en  $C$ . Le quart de cercle  $\widehat{AB}$  est centré en  $O$ . L'aire de la région colorée en gris clair est  $S_1$  et celle de la région colorée en gris foncé est  $S_2$ . Laquelle des affirmations suivantes est correcte ?



- (A)  $S_1 < \frac{1}{\sqrt{2}}S_2$     (D)  $S_2 < S_1 \leq \sqrt{2}S_2$   
 (B)  $\frac{1}{\sqrt{2}}S_2 \leq S_1 < S_2$     (E)  $\sqrt{2}S_2 < S_1$   
 (C)  $S_1 = S_2$

11. Quelle est la négation logique de la phrase « Tous les chats sont des animaux intelligents. » ?

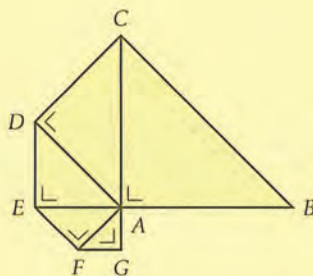
- (A) « Il existe un animal intelligent qui n'est pas un chat. »  
 (B) « Il existe un chat qui n'est pas un animal intelligent. »  
 (C) « Certains chats ne sont pas des animaux, mais sont intelligents. »  
 (D) « Aucun chat n'est un animal intelligent. »  
 (E) « Tous les chats sont des animaux non intelligents. »

12. *Sans réponse préformulée* — Soit  $ABCD$  un tétraèdre. Les points  $M$ ,  $N$  et  $P$  sont les milieux de  $[AB]$ ,  $[AC]$  et  $[AD]$ . Le point  $Q$  appartient à la face  $BCD$ . Si le volume du tétraèdre  $ABCD$  est 456, quel est celui du tétraèdre  $MNPQ$ ?

13. Le polynôme  $P(x) = ax^2 + bx + c$  a deux zéros réels  $x_1$  et  $x_2$ . Si  $u$ ,  $v$  et  $w$  sont tels que  $u < x_1 < v < x_2 < w$ , alors :

- (A)  $P(v) \cdot P(w) > 0$ ;                      (D)  $P(u) \cdot P(v) > 0$ .  
 (B)  $P(u) \cdot P(w) < 0$ ;                      (E) Aucune de ces relations  
 (C)  $P(u) \cdot P(w) > 0$ ;

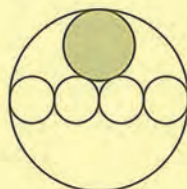
14. *Sans réponse préformulée* — Sur la figure ci-contre,  $ABC$ ,  $DAC$ ,  $EAD$ ,  $FAE$  et  $GAF$  sont des triangles rectangles isocèles. Que vaut la somme des aires de ces cinq triangles si  $|AB| = 24$ ?



15. Soit  $N$  le plus petit naturel non nul divisible par 45 et qui ne contient que 0 et 1 comme chiffres. Quelle est la somme des chiffres de  $N$ ?

- (A) 6                      (B) 9                      (C) 12                      (D) 15                      (E) 18

16. Sur la figure ci-contre, quatre petits cercles de même rayon, tangents l'un à l'autre, sont disposés le long d'un diamètre du grand cercle. Le cercle grisé est tangent extérieurement à deux de ces petits cercles et intérieurement au grand cercle. Quel est le rapport du rayon du cercle grisé à celui des petits cercles?



- (A)  $8/5$                       (B)  $64/25$                       (C)  $3/2$                       (D)  $\pi/2$                       (E) Une autre réponse

17. Qu'est-ce qui n'existe pas ?

- (A) Une fonction paire dont le graphe admet une unique asymptote.  
 (B) Une fonction impaire dont le graphe ne passe pas par l'origine.  
 (C) Une fonction impaire ayant quatre zéros et dont le graphe passe par l'origine.  
 (D) Une fonction paire ayant un nombre impair de zéros.  
 (E) Une fonction impaire dont le graphe admet deux asymptotes.

18. Trois amis ont apporté chacun un cadeau qu'ils placent dans une corbeille. Ils tirent ensuite au sort pour distribuer les cadeaux. Quelle est la probabilité que chacun des trois amis reçoive le cadeau qu'il avait lui-même apporté ?

- (A) 1                      (B)  $\frac{1}{2}$                       (C)  $\frac{1}{3}$                       (D)  $\frac{1}{6}$                       (E)  $\frac{1}{8}$

19. *Sans réponse préformulée* — L'octogone ci-contre a ses sommets aux tiers des côtés du carré. Si son aire est de  $1008 \text{ cm}^2$ , quelle est, en centimètres, la longueur du côté du carré ?



20. Si  $a$  et  $b$  sont des nombres réels tels que  $a^2 + b^2 = 10$ , quelle est la plus grande valeur que peut prendre  $2a^2 + 3b^2$  ?

- (A) 20                      (B) 25                      (C) 30                      (D) 50                      (E) Une autre réponse

21. Si  $ab = 144$  et  $a + b = 30$  avec  $a > b$ , que vaut  $a - b$  ?

- (A) 4                      (B) 6                      (C) 18                      (D) 22                      (E) 24

22. Une boule est inscrite dans un cube qui est lui-même inscrit dans un cylindre circulaire (c'est-à-dire que les bases du cylindre contiennent chacune une face du cube et que la surface latérale du cylindre contient quatre arêtes du cube). Quelle fraction du volume du cylindre est occupée par la boule ?

- (A)  $2 - \sqrt{3}$                       (B)  $\frac{1}{\pi}$                       (C)  $\frac{1}{3}$                       (D)  $\frac{2}{5}$                       (E) Une autre valeur

23. Que vaut le reste de la division de  $1 + 3x + 5x^2 + 7x^3 + \dots + 99x^{49}$  par  $x - 1$  ?

- (A) 2000      (B) 2500      (C) 3000      (D) 3500  
 (E) Aucune de ces réponses

24. Dans le plan, un triangle  $ABC$  a une base  $[AB]$  fixe, mais le sommet  $C$  se déplace sur une droite. Alors le centre de gravité du triangle se déplace sur

- (A) Un cercle ;                      (D) Une hyperbole ;  
 (B) Une ellipse ;                    (E) Une droite.  
 (C) Une parabole ;

25. *Sans réponse préformulée* — Le produit des âges de mes enfants vaut 4131. L'âge du plus jeune est le tiers de l'âge de l'ainé. Quelle est la somme des âges de mes enfants ?

26. *Sans réponse préformulée* — Pol prend des jetons marqués M, A et T, et les dispose comme ci-dessous. Ensuite, il cherche à remplacer chacune des 3 lettres par un chiffre différent de telle manière que la somme des 3 nombres soit égale à 1416 :

$$\begin{array}{r} \text{M} \quad \text{A} \quad \text{M} \\ \text{M} \quad \text{A} \quad \text{T} \\ \text{M} \quad \text{T} \quad \text{T} \\ \hline 1 \quad 4 \quad 1 \quad 6 \end{array}$$

Quel est alors le nombre qui s'écrit MAT ?

27. Dans un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit mesurent  $a$  et  $b$ , est inscrit un rectangle à côtés parallèles aux côtés de l'angle droit. Quelle est la valeur maximale de l'aire d'un tel rectangle ?

- (A)  $\frac{1}{5}ab$       (B)  $\frac{\sqrt{2}}{4}ab$       (C)  $\frac{3}{5}ab$       (D)  $\frac{1}{4}ab$       (E)  $\frac{\sqrt{2}}{6}ab$

28. *Sans réponse préformulée* — Un gobelet est constitué d'un fond en forme de demi-sphère de rayon 6 cm (avec sa concavité tournée vers le haut) complété d'un cylindre de même rayon et de hauteur 6 cm. Il est maintenu de manière que l'axe du cylindre soit vertical. Jusqu'à quelle hauteur (mesurée en centimètres) faut-il le remplir pour qu'il contienne la moitié de sa capacité totale ?

29. *Sans réponse préformulée* — Quel est le plus grand naturel  $n$  tel que  $\sqrt{n-50} + \sqrt{n+50} < 50$  ?

30. Un troupeau comprend 10 chameaux (à deux bosses) et 20 dromadaires (à une seule bosse). En choisissant trois animaux au hasard dans ce troupeau, quelle est la probabilité d'avoir quatre bosses exactement ?

- (A)  $\frac{1}{10}$       (B)  $\frac{1}{3000}$       (C)  $\frac{45}{203}$       (D)  $\frac{95}{203}$       (E) Une autre réponse