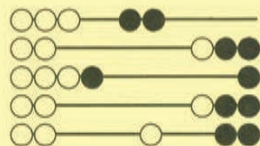




**OLYMPIADE
MATHÉMATIQUE BELGE**



Quarante-cinquième Olympiade Mathématique Belge

Organisée par la Société Belge des Professeurs de Mathématique

Maxi éliminatoire 2020

INSTRUCTIONS

- N'ouvrez pas ce livret avant le signal de votre professeur.
- Vous indiquerez vos réponses au verso de cette page.
- Ce questionnaire contient 30 questions ; répondez à 5 questions au moins.
- Vingt-deux questions sont à choix multiple. Chacune est suivie de réponses désignées par **A**, **B**, **C**, **D** et **E**. Chaque question possède une seule réponse correcte. Décidez quelle est la réponse correcte parmi les cinq proposées et reprenez la lettre majuscule correspondante. Sur la feuille réponse, écrivez cette lettre dans le cercle situé à droite du numéro de la question.
EXEMPLE : si vous estimez que la réponse correcte à la question numéro 17 est celle précédée de la lettre **D**, vous écrirez D sur la feuille réponse, à droite du numéro 17, dans le cercle.
- Huit questions sont sans réponses préformulées. Dans ce cas, la réponse correcte est un nombre entier dans [0;999]. C'est ce nombre que vous écrirez dans la case rectangulaire de la feuille réponse.
- RÈGLES DE COTATION** : Vous recevez 5 points par réponse correcte, 2 points par abstention et 0 point par réponse fausse. Avec ce système, deviner fera en moyenne diminuer votre score. Vous n'avez intérêt à deviner que si vous avez au moins une chance sur deux de bien choisir.
- Reportez les réponses au fur et à mesure que vous les obtenez. Écrivez au crayon (si vous changez d'avis, gomez la réponse). Du papier de brouillon, du papier millimétré, une règle, un compas, une gomme peuvent être utilisés. Les calculatrices et règles à calcul ne sont pas autorisées, de même que les livres et les notes personnelles.
- Au signal de votre professeur, détachez la feuille de couverture sans déchirer le questionnaire, retournez-la, couvrez-en les questions, puis inscrivez les informations demandées.
- Quand votre professeur vous l'indiquera, commencez le travail sur les problèmes. Vous disposez de 90 minutes.

Mercredi 15 janvier 2020

À REMPLIR PAR L'ÉLÈVE (en majuscules)

Nom :

Prénom :

Classe :

Adresse privée

Rue et n° :

Code postal et localité :

École

Nom (sans abréviations) :

Adresse

Rue et n° :

Code postal et localité :

CADRE RÉSERVÉ AU PROFESSEUR

Chaque réponse correcte a une valeur de 5 points et chaque abstention a une valeur de 2 points ; rien n'est déduit pour une réponse fausse. Le score total est calculé en prenant 5 fois le nombre de réponses correctes et en ajoutant 2 fois le nombre d'abstentions.

Réponses correctes : × 5 =

+

Abstentions : × 2 =

Score total :

1	<input type="radio"/>
2	<input type="radio"/>
3	<input type="text"/>
4	<input type="radio"/>
5	<input type="radio"/>
6	<input type="radio"/>
7	<input type="text"/>
8	<input type="radio"/>
9	<input type="radio"/>
10	<input type="radio"/>
11	<input type="radio"/>
12	<input type="radio"/>
13	<input type="radio"/>
14	<input type="radio"/>
15	<input type="radio"/>
16	<input type="text"/>
17	<input type="radio"/>
18	<input type="radio"/>
19	<input type="text"/>
20	<input type="radio"/>
21	<input type="radio"/>
22	<input type="radio"/>
23	<input type="text"/>
24	<input type="text"/>
25	<input type="text"/>
26	<input type="radio"/>
27	<input type="radio"/>
28	<input type="radio"/>
29	<input type="radio"/>
30	<input type="text"/>

1. Parmi les nombres suivants, lequel est le plus grand ?

- (A) $2 \times 3 \times 10^{34}$ (D) 10^{35}
(B) $0,6 \times 10^{34}$ (E) 6000×10^{32}
(C) $0,0006 \times 10^{36}$

2. Théodore achète 5 glaces pour 9 € et 8 tablettes de chocolat pour 18 €. Combien Amandine doit-elle payer pour 8 glaces et 5 tablettes de chocolat ?

- (A) 25,65 € (D) 26,25 €
(B) 25,80 € (E) 26,40 €
(C) 26,10 €

3. *Sans réponse préformulée* — Le code de mon casier est un nombre à 3 chiffres, tous impairs et tous différents. Le nombre formé par ces 3 chiffres est un multiple de 5, de 7 et de 9. Quel est ce code ?

4. Soit $ABCD$ un rectangle de longueur $|AB| = 26$ et de largeur $|AD| = 15$. Sur les segments $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$ sont situés respectivement les points E , F , G et H tels que $|BE| = |BF| = |DG| = |DH| = 8$. Que vaut l'aire du quadrilatère $EFGH$?

- (A) 195 (B) 200 (C) 205 (D) 210 (E) 216

5. La somme de trois nombres premiers distincts est 40. Quelle est la différence entre les deux plus grands de ces trois nombres ?

- (A) 0 (B) 12 (C) 16 (D) 20 (E) 24

6. Les questionnaires de l'Olympiade Mathématique Belge sont enfermés dans un coffre qui s'ouvre avec trois clés identiques, à introduire en même temps dans ses trois serrures. Six membres du jury possèdent chacun une clé valide :

- Pascal ne peut se libérer que le mardi et le jeudi ;
- Lise ne peut se libérer ni le lundi, ni le jeudi, ni le vendredi, mais bien les autres jours ;
- Michel n'est pas libre le lundi, le vendredi ni le samedi mais est libre les autres jours ;
- Jules est retenu par d'autres obligations le lundi, le mardi et le mercredi, mais pas les autres jours ;
- Andrée n'est libre que le lundi et le mardi ;
- Benoit peut être là uniquement le mardi.

Combien de jours par semaine le jury peut-il ouvrir le coffre ?

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

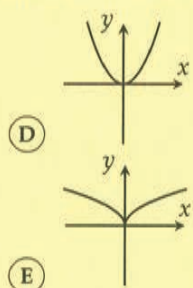
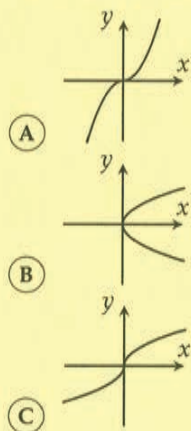
7. *Sans réponse préformulée* — Le côté du petit carré vaut le tiers du côté du carré moyen ; le côté du carré moyen vaut la moitié du côté du grand carré. Si l'aire du plus grand carré est 252 cm^2 , quelle est celle du plus petit carré, en centimètres carrés ?



8. Si $a + b = 5$ et que $a^2 + b^2 = 19$, alors $(-2ab)^2 =$

- (A) 16 (B) 25 (C) 36 (D) 49 (E) 64

9. Parmi les suivants, quel est le graphique de la fonction $y = x|x|$?



10. Si $4^x = 1024$ et que $9^y = (\sqrt{3})^{16}$, alors

- (A) $x + y = 0$; (B) $x - y = 0$; (C) $x < y$; (D) $x < 0 < y$.
 (E) Aucune des relations précédentes n'est vérifiée.

11. Dans un repère orthonormé, combien de points du cercle de centre $(0,0)$ et de rayon 5 ont leurs deux coordonnées entières ?

- (A) 0 (B) 4 (C) 8 (D) 12 (E) 20

12. Pour des nombres naturels a, b, c , le nombre $2^a \times 4^b \times 8^c$ est un carré parfait si :

- (A) $a + b$ est pair; (D) a est pair;
 (B) $a + b$ est impair; (E) a est impair et $b + c$ est pair.
 (C) $a + c$ est pair;

13. Un rectangle de 10 sur 12 est inscrit à un demi-cercle; le côté mesurant 12 est placé sur le diamètre. Quelle est l'aire du demi-disque ? La figure n'est pas à l'échelle.



- (A) 13π (B) 49π (C) 68π (D) $169\pi/2$ (E) 136π

14. Un parallépipède rectangle a une base carrée. Si la longueur des côtés de sa base augmente de 25 %, de quel pourcentage doit diminuer sa hauteur pour que son volume reste le même ?

- (A) 12,5 % (B) 25 % (C) 30 % (D) 36 % (E) 50 %

15. Soit m un nombre réel et $f(x) = x^2 - 5x + m$. Quelle valeur de x , autre que 2020, satisfait $f(x) = f(2020)$?

- (A) -2020 (B) -2015 (C) 2019 (D) 2025
 (E) La réponse dépend de m .

16. *Sans réponse préformulée* — Une date est *palindromique* si son écriture au format $jjmmaaaa$ (où jj , mm et $aaaa$ représentent respectivement le jour, le mois, et l'année) est la même suite de chiffres qu'elle soit lue de gauche à droite ou de droite à gauche. Le 2 février 2020, ou 02022020, est une date palindromique. Combien de jours plus tard aurons-nous la date palindromique suivante (sachant que février comptera 29 jours en 2020, année bissextile) ?

17. Combien de solutions admet l'équation $\cos(\sin(x)) = \frac{1}{2}$ dans l'intervalle $0 \leq x < 2\pi$?

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) Une infinité

18. Quel est le plus grand entier par lequel l'expression $2 + 4^n$ est toujours divisible, quel que soit n naturel non nul ?

- (A) 2 (B) 3 (C) 6 (D) 12 (E) Un autre nombre

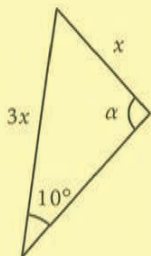
19. *Sans réponse préformulée* — Le nombre naturel n est strictement compris entre 1 et 20. Anne additionne tous les nombres naturels de 1 à n compris et Benji additionne tous les nombres naturels de $n + 1$ à 20 compris. Ils trouvent la même somme. Que vaut n ?

20. La tante Suzanne va fêter ses 90 ans. Par un extraordinaire hasard, ses enfants eurent tous le même nombre d'enfants : 2 en moins que leur mère ; et ses petits-enfants eurent tous le même nombre d'enfants : 2 en moins que leurs parents. Ses arrière-petits-enfants, au nombre de 315, n'ont pas encore d'enfant. Quel est le nombre total des descendants de la tante Suzanne ?

- (A) 430 (B) 387 (C) 344 (D) 301 (E) 258

21. La figure ci-contre n'étant pas à l'échelle, laquelle des affirmations la concernant est correcte ?

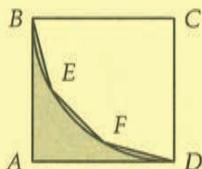
- (A) $\alpha = 30^\circ$
- (B) $\sin \alpha = 3 \sin 10^\circ$
- (C) $\sin \alpha = \frac{1}{3} \sin 10^\circ$
- (D) $\cos \alpha = \frac{1}{3}$
- (E) $\cos \alpha = 3$



22. Combien existe-t-il de couples (a, b) de nombres entiers tels que $[(2a - b)^2 - (a - 2b)^2]^2 = 225$?

- (A) 0
- (B) 2
- (C) 4
- (D) 8
- (E) Une infinité

23. Sans réponse préformulée — Sur la figure ci-contre, $ABCD$ est un carré de côté 60. Les points B, E, F et D appartiennent à un même cercle de centre C ; de plus, $|BE| = |EF| = |FD|$. Que vaut l'aire du polygone $ABEFD$?



24. Sans réponse préformulée — Combien existe-t-il de triplets (x, y, z) d'entiers consécutifs tels que $x < y < z$ et $xyz = x + y + z$?

25. Sans réponse préformulée — Si n est un naturel non nul, $n!$ est une abréviation pour $n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$. Que vaut

$$\frac{(12! + 11!)(10! + 9!)(8! + 7!)(6! + 5!)(4! + 3!)(2! + 1!)}{(12! - 11!)(10! - 9!)(8! - 7!)(6! - 5!)(4! - 3!)(2! - 1!)}$$
 ?

26. Soient a, b, c les trois racines réelles du polynôme $x^3 - 3x^2 - 19x + 1$. Que vaut $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$?

- (A) 19
- (B) 3
- (C) 1
- (D) 0
- (E) $-\frac{1}{3}$

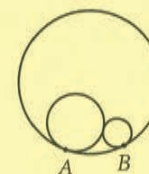
27. Quel doit être le lien entre les coefficients m et p de l'équation $x^2 + mx + p = 0$, d'inconnue x , pour que la différence des racines soit égale à 1 ?

- (A) $p = 4m^2 + 1$
- (B) $m = 2p + 1$
- (C) $m = 4p - 1$
- (D) $m^2 = 2p - 1$
- (E) $m^2 = 4p + 1$

28. Le triangle ABC est rectangle en C , avec $|AC| = 2$ et $|BC| = 3$. Le point O est le milieu de $[AB]$ et le point H est le pied de la hauteur issue de C . Que vaut l'aire du triangle CHO ?

- (A) $\frac{1}{2}$
- (B) $\frac{7}{13}$
- (C) $\frac{15}{26}$
- (D) $\frac{8}{13}$
- (E) $\frac{17}{26}$

29. Sur la figure ci-dessous, le grand cercle de rayon 5 est tangent intérieurement aux deux petits cercles de rayons 2 et 1 en A et B respectivement. Les deux petits cercles sont tangents extérieurement l'un à l'autre. Que vaut $|AB|$?



- (A) 5
- (B) $2\sqrt{5}$
- (C) $\frac{5\sqrt{6}}{3}$
- (D) $\frac{9\sqrt{5}}{5}$
- (E) $\frac{5\sqrt{3}}{3}$

30. Sans réponse préformulée — L'équation $x^4 - 40x^2 + k = 0$, d'inconnue x , admet 4 racines réelles distinctes qui forment une suite arithmétique. Que vaut k ?