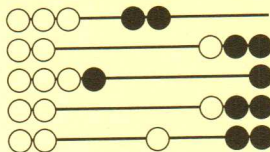




**OLYMPIADE
MATHEMATIQUE BELGE**



Quarante-sixième Olympiade Mathématique Belge

Organisée par la Société Belge des Professeurs de Mathématique

Maxi éliminatoire 2021

INSTRUCTIONS

1. N'ouvrez pas ce livret avant le signal de votre professeur.
2. Vous indiquerez vos réponses au verso de cette page.
3. Ce questionnaire contient 30 questions ; répondez à 5 questions au moins.
4. Vingt-deux questions sont à choix multiple. Chacune est suivie de réponses désignées par **(A)**, **(B)**, **(C)**, **(D)** et **(E)**. Chaque question possède une seule réponse correcte. Décidez quelle est la réponse correcte parmi les cinq proposées et retenez la lettre majuscule correspondante. Sur la feuille réponse, écrivez cette lettre dans le cercle situé à droite du numéro de la question.
EXEMPLE : si vous estimez que la réponse correcte à la question numéro 17 est celle précédée de la lettre **(D)**, vous écrirez D sur la feuille réponse, à droite du numéro 17, dans le cercle.
5. Huit questions sont sans réponses préformulées. Dans ce cas, la réponse correcte est un nombre entier dans $[0;999]$. C'est ce nombre que vous écrirez dans la case rectangulaire de la feuille réponse.
6. **RÈGLES DE COTATION** : Vous recevez 5 points par réponse correcte, 2 points par abstention et 0 point par réponse fausse. Avec ce système, deviner fera en moyenne diminuer votre score. Vous n'avez intérêt à deviner que si vous avez au moins une chance sur deux de bien choisir.
7. Reportez les réponses au fur et à mesure que vous les obtenez. Écrivez au crayon (si vous changez d'avis, gomez la réponse). Du papier de brouillon, du papier millimétré, une règle, un compas, une gomme peuvent être utilisés. Les calculatrices et règles à calcul ne sont pas autorisées, de même que les livres et les notes personnelles.
8. Au signal de votre professeur, détachez la feuille de couverture sans déchirer le questionnaire, retournez-la, couvrez-en les questions, puis inscrivez les informations demandées.
9. Quand votre professeur vous l'indiquera, commencez le travail sur les problèmes. Vous disposez de 90 minutes.

Mercredi 13 janvier 2021

À REMPLIR PAR L'ÉLÈVE (en majuscules)

Nom :

Prénom :

Classe :

Adresse privée

Rue et n° :

Code postal et localité :

École

Nom (sans abréviations) :

Adresse

Rue et n° :

Code postal et localité :

CADRE RÉSERVÉ AU PROFESSEUR

Chaque réponse correcte a une valeur de 5 points et chaque abstention a une valeur de 2 points ; rien n'est déduit pour une réponse fausse. Le score total est calculé en prenant 5 fois le nombre de réponses correctes et en ajoutant 2 fois le nombre d'abstentions.

Réponses correctes :

<input type="text"/>	× 5 =	<input type="text"/>
----------------------	-------	----------------------

+

Abstentions :

<input type="text"/>	× 2 =	<input type="text"/>
----------------------	-------	----------------------

Score total :

<input type="text"/>

- 1
- 2
- 3
- 4
- 5
- 6
- 7
- 8
- 9
- 10
- 11
- 12
- 13
- 14
- 15
- 16
- 17
- 18
- 19
- 20
- 21
- 22
- 23
- 24
- 25
- 26
- 27
- 28
- 29
- 30

1. Le cube de 3^3 est :

- (A) 3^4 (B) 3^6 (C) 3^9 (D) 3^{27} (E) 9^9

2. Que vaut x si $x^{-3/2} = \frac{1}{8}$?

- (A) 4 (B) -4 (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\sqrt{4}$ (E) $\sqrt[3]{4}$

3. Si n est un naturel non nul, $n!$ est une abréviation pour $n \cdot (n-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$.

Que vaut $\frac{2021! - 2020!}{2020!}$?

- (A) 2020 (B) 2021 (C) $\frac{1}{2020!}$ (D) $2021 \cdot 2020$ (E) 2021!

4. « Tout chat a quatre pattes. » Si cette hypothèse est vraie, il est nécessairement vrai que :

- (A) « Un animal à trois pattes est un chat » ;
(B) « Un animal à quatre pattes est un chat » ;
(C) « Un animal à cinq pattes est un chat » ;
(D) « Un chat a une queue » ;
(E) « Un animal à trois pattes n'est pas un chat ».

5. Sans réponse préformulée — Deux nombres entiers a et b sont tels que $a > b \geq 0$. Leur différence est 20 et la différence de leurs carrés est 1400. Que vaut a ?

6. Sans réponse préformulée — Que vaut $\sqrt{2021^2 - 2019 \times 2023}$?

7. Quelle est la somme de tous les chiffres du nombre $10^{99} - 99$?

- (A) 2 (B) 99 (C) 874 (D) 991 (E) Une autre réponse

8. Laquelle des affirmations suivantes à propos d'un triangle quelconque est fausse?

(A) Si le point d'intersection des hauteurs est extérieur au triangle, alors le point d'intersection des médiatrices est extérieur au triangle.

(B) Si le point d'intersection des hauteurs est sur un côté du triangle, alors il est également sur un second côté du triangle.

(C) Si le point d'intersection des médiatrices est sur un côté du triangle, alors le triangle est rectangle.

(D) Le point d'intersection des médianes n'est jamais extérieur au triangle.

(E) Si une hauteur, une médiatrice et une médiane sont confondues, alors le triangle est équilatéral.

9. Sans réponse préformulée — La droite passant par les points (15;25) et (24;40) passe par (k;135). Que vaut k?

10. Si, pour tout nombre réel x , $f(x) < 0$ et $g(x) = |f(x)|$, alors quelle transformation applique le graphe de f sur celui de g ?

(A) La symétrie d'axe Ox

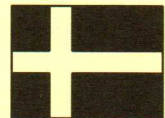
(D) La symétrie d'axe $y = -x$

(B) La symétrie d'axe Oy

(E) La symétrie de centre O

(C) La symétrie d'axe $y = x$

11. Ce drapeau est un rectangle de longueur 1,6 m et de largeur 1 m composé d'une croix blanche sur fond noir. L'aire de la croix blanche est égale aux $\frac{3}{10}$ de l'aire totale du drapeau. Les deux bandes blanches qui se croisent ont la même largeur. Quelle est, en millimètres, la largeur de chacune de ces bandes blanches?



(A) $\frac{2400}{13}$

(B) 200

(C) 2400

(D) $1300 - 100\sqrt{217}$

(E) Une autre réponse

12. $1 + 11 + 111 + \dots + \underbrace{11\dots1}_{10 \text{ chiffres}} =$

- (A) 10 000 000 000 (D) 12 345 678 900
 (B) 1 234 567 900 (E) 9 999 999 999
 (C) 1 234 567 899

13. L'expression $\sqrt{\sin \alpha - \cos \alpha}$ est définie lorsqu'il existe un entier k tel que :

- (A) $k\pi \leq \alpha \leq \pi/4 + k\pi$ (D) $\pi/4 + k\pi \leq \alpha \leq (k+1)\pi$
 (B) $\pi/4 + k\pi \leq \alpha \leq 3\pi/4 + k\pi$ (E) $3\pi/4 + k\pi \leq \alpha \leq (k+1)\pi$
 (C) $\pi/4 + 2k\pi \leq \alpha \leq 5\pi/4 + 2k\pi$

14. Hercule reprend la gérance d'une épicerie. Le premier matin, il note qu'il reste 15 bottes de poireaux en stock. Ce jour-là, il achète 16 bottes et il en vend 17. Le lendemain, il en achète 18 et en vend 19. Le jour suivant, il en achète 20 et en vend 21. Dans les jours suivants, il achète toujours deux bottes de poireaux de plus que le jour précédent et il en vend toujours deux bottes de plus que le jour précédent. Combien Hercule aura-t-il vendu de bottes de poireaux au moment où son stock sera totalement épuisé ?

- (A) 15 (B) 225 (C) 465 (D) 527
 (E) Son stock ne sera jamais épuisé.

15. Quel est l'ensemble des nombres réels a pour lesquels l'équation $x^2 + ax + a = 1$, d'inconnue x , possède deux solutions réelles distinctes ?

- (A) $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ (B) $]2; \infty[$ (C) $\{2\}$ (D) $]-\infty; 0[\cup]4; \infty[$ (E) \mathbb{R}

16. La grande diagonale d'un losange est de longueur 10. Le rayon du cercle inscrit à ce losange vaut 3. Quelle est l'aire de ce losange ?

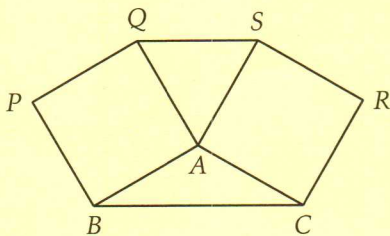
- (A) 30 (B) $\frac{75}{2}$ (C) $\frac{600\sqrt{91}}{91}$ (D) $\frac{200}{3}$ (E) Une autre réponse

17. Soit $f(x) = ax^2 - 4$ avec $a \neq 0$. Sachant que $f(f(1)) = -4$, que vaut $f(2)$?

- (A) -4 (B) 0 (C) 1 (D) 2 (E) 12

18. Lefort effectue une montée de 2700 m de long en 31 minutes, une partie à pied à la vitesse de 2 km/h, le reste en vélo à 12 km/h. Combien de temps, en minutes, marche-t-il ?
- (A) 17 (B) 19 (C) 21 (D) 23 (E) 25
19. Les arêtes d'un grand cube mesurent a cm, avec a entier et $a > 2$. Toutes les faces de ce cube sont entièrement peintes puis ce cube est soigneusement découpé en a^3 petits cubes dont les arêtes mesurent 1 cm. Il y a 6 fois plus de petits cubes peints sur une face que de petits cubes peints sur deux faces. Que vaut a ?
- (A) 6 (B) 8 (C) 10 (D) 12 (E) 14
20. *Sans réponse préformulée* — La somme des longueurs des trois côtés d'un triangle rectangle vaut 18 tandis que la somme de leurs carrés vaut 128. Quelle est l'aire de ce triangle ?
21. *Sans réponse préformulée* — Le carré *CENT* a une aire de 100. Les points X et Y sont les milieux de $[EN]$ et $[NT]$ respectivement. Le point Z est tel que $\overrightarrow{CZ} = \overrightarrow{CX} + \overrightarrow{CY}$. Quelle est l'aire du quadrilatère $CXZY$?
22. *Sans réponse préformulée* — Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, E est l'ensemble des points ayant deux coordonnées nulles et une coordonnée égale à 1 ou -1 . Combien existe-t-il de triangles équilatéraux dont les trois sommets appartiennent à E ?
23. *Sans réponse préformulée* — La boulangère a pétri 100 petits pains : les uns aux raisins et les autres au chocolat. Si elle partageait les pains aux raisins en parts égales entre quatre clients, il lui resterait un pain. Si elle partageait les pains au chocolat en parts égales entre six clients, il lui resterait encore un pain. De plus, il y a un chiffre 3 dans le nombre de pains au chocolat et pas de chiffre 9 dans le nombre de pains aux raisins. Combien y a-t-il de pains au chocolat ?
24. Soit x et y deux réels. Qu'implique l'égalité $y^2 = x^3 - x^2$?
- (A) $x \geq 1$ (B) $x \leq 1$ (C) $y \geq 1$ (D) $y \leq 1$
 (E) Aucune des inégalités précédentes

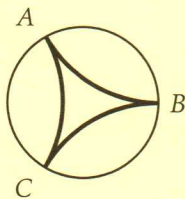
25. Dans cette figure, $AQPB$ et $ASRC$ sont des carrés et AQS est un triangle équilatéral. Si $|QS| = 4$, que vaut $|BC|$?



- (A) 8 (B) $4\sqrt{3}$ (C) 16 (D) $6\sqrt{2}$ (E) Une autre valeur
26. Quels que soient $a \geq b \geq 0$, nécessairement $\sqrt{a} - \sqrt{b} =$
- (A) $\sqrt{a-b}$ (B) $\sqrt{a+b}$ (C) $\sqrt{a+b+2\sqrt{ab}}$ (D) $\sqrt{a+b-2\sqrt{ab}}$
 (E) Aucune de ces réponses
27. Six sièges sont alignés. Combien de manières existe-t-il d'y asseoir les six membres d'un jury, Alex, Bernard, Charles, Dany, Eveline et Françoise, si Alex et Bernard ne veulent pas être assis l'un à côté de l'autre?
- (A) 400 (B) 420 (C) 480 (D) 560 (E) 600
28. *Sans réponse préformulée* — Si x et y sont des nombres naturels strictement positifs tels que $x + y + xy = 340$, que vaut $x + y$?
29. Un soir, je fais un tour de mon quartier en marchant à allure régulière. Ma sœur fait plusieurs fois le même tour en courant dans le même sens, à vitesse constante. Nous quittons la maison et nous rentrons en même temps. Ce soir-là, elle m'a doublé deux fois. Le lendemain, nous maintenons nos allures respectives, mais ma sœur court dans l'autre sens. Combien de fois me croisera-t-elle pendant mon tour du quartier? (Les rencontres au point de départ et d'arrivée ne comptent pas.)

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 6

30. Trois arcs de cercle de même rayon sont tangents deux à deux en A , B et C sur un cercle de rayon 1. Quel est le périmètre du triangle curviligne ABC , représenté sur la figure ci-dessous ?



- (A) $\pi\sqrt{3}$ (B) 2π (C) $2\pi\sqrt{3}$ (D) $3\sqrt{3} - \frac{3}{2}\pi$ (E) $3\sqrt{3}\frac{\pi}{2}$