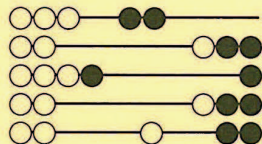




**OLYMPIADE
MATHÉMATIQUE BELGE**



Quarante-septième Olympiade Mathématique Belge

Organisée par la Société Belge des Professeurs de Mathématique

Maxi éliminatoire 2022

INSTRUCTIONS

- N'ouvrez pas ce livret avant le signal de votre professeur.
- Vous indiquerez vos réponses au verso de cette page.
- Ce questionnaire contient 30 questions ; répondez à 5 questions au moins.
- Vingt-deux questions sont à choix multiple. Chacune est suivie de réponses désignées par (A), (B), (C), (D) et (E). Chaque question possède une seule réponse correcte. Décidez quelle est la réponse correcte parmi les cinq proposées et retenez la lettre majuscule correspondante. Sur la feuille réponse, écrivez cette lettre dans le cercle situé à droite du numéro de la question.
EXEMPLE : si vous estimez que la réponse correcte à la question numéro 17 est celle précédée de la lettre (D), vous écririez D sur la feuille réponse, à droite du numéro 17, dans le cercle.
- Huit questions sont sans réponses préformulées. Dans ce cas, la réponse correcte est un nombre entier dans [0;999]. C'est ce nombre que vous écrirez dans la case rectangulaire de la feuille réponse.
- RÈGLES DE COTATION : Vous recevez 5 points par réponse correcte, 2 points par abstention et 0 point par réponse fausse. Avec ce système, deviner fera en moyenne diminuer votre score. Vous n'avez intérêt à deviner que si vous avez au moins une chance sur deux de bien choisir.
- Reportez les réponses au fur et à mesure que vous les obtenez. Écrivez au crayon (si vous changez d'avis, gomez la réponse). Du papier de brouillon, du papier millimétré, une règle, un compas, une gomme peuvent être utilisés. Les calculatrices et règles à calcul ne sont pas autorisées, de même que les livres et les notes personnelles.
- Au signal de votre professeur, détachez la feuille de couverture sans déchirer le questionnaire, retournez-la, couvrez-en les questions, puis inscrivez les informations demandées.
- Quand votre professeur vous l'indiquera, commencez le travail sur les problèmes. Vous disposez de 90 minutes.

Mercredi 19 janvier 2022

À REMPLIR PAR L'ÉLÈVE (en majuscules)

Nom :

Prénom :

Classe :

Adresse privée

Rue et n° :

Code postal et localité :

École

Nom (sans abréviations) :

Adresse

Rue et n° :

Code postal et localité :

CADRE RÉSERVÉ AU PROFESSEUR

Chaque réponse correcte a une valeur de 5 points et chaque abstention a une valeur de 2 points ; rien n'est déduit pour une réponse fausse. Le score total est calculé en prenant 5 fois le nombre de réponses correctes et en ajoutant 2 fois le nombre d'abstentions.

Réponses correctes : × 5 =

Abstentions : × 2 =

Score total :

1



2



3



4



5



6



7



8



9



10



11



12



13



14



15



16



17



18



19



20



21



22



23



24



25



26



27



28



29



30



1. Dans une course, Léa rejoint le coureur en douzième position et le dépasse. Quelle place occupe-t-elle alors ?

- (A) 1 (B) 2 (C) 11 (D) 12 (E) 13

2. Depuis le 1^{er} janvier 2022, Jade calcule la somme des chiffres de la date du jour. Par exemple, pour le 1^{er} janvier 2022, elle a obtenu $1 + 1 + 2 + 0 + 2 + 2 = 8$. Quelle est la plus grande somme qu'elle obtiendra pendant l'année 2022 ?

- (A) 18 (B) 19 (C) 20 (D) 22 (E) 26

3. S'il est vrai que « *Tout chat tricolore est une femelle* », il en découle nécessairement

- (A) « *Aucun chat mâle n'est tricolore* » ;
 (B) « *Tout chat femelle est tricolore* » ;
 (C) « *Il existe un chat tricolore mâle* » ;
 (D) « *Il existe un chat femelle non tricolore* » ;
 (E) « *Aucun chat femelle n'est tricolore.* »

4. Si $x^2 = x + 1$, que vaut $x^3 - x^2$?

- (A) 1 (B) x (C) $x + 1$ (D) x^2 (E) On ne peut le déterminer.

5. Un pantalon coûte au départ 128 € puis subit une augmentation de x pour cent pour finalement connaître une réduction de x pour cent. Son nouveau prix est de 126 €. Que vaut x ?

- (A) 98 (B) 87,5 (C) 50 (D) 12,5 (E) 2

6. L'ensemble des nombre réels x vérifiant $-1 < 2x^2 - 1 < 1$ est

- (A) $[-1, 1]$ (D) $x < -1$ ou $x < 1$
 (B) $] -1, 1[$ (E) $x < -1$ et $x < 1$
 (C) $] -1, 0[\cup] 0, 1[$

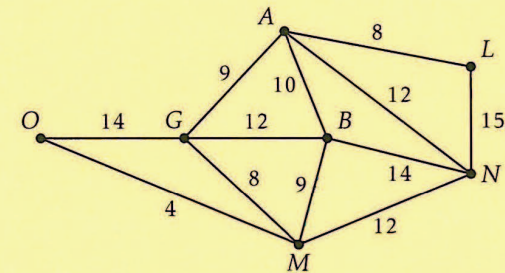
7. La fonction polynomiale g de \mathbb{R} vers \mathbb{R} a pour tableau de variation :

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow 2$	$\searrow -3$	$\nearrow +\infty$

Alors le nombre de solutions dans \mathbb{R} de l'équation $g(x) = -1$ est

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) Une autre réponse

8. *Sans réponse préformulée* — La figure ci-dessous représente le réseau routier d'un royaume imaginaire, avec les temps de parcours. Quelle est la durée la plus courte d'un trajet de la ville O à la ville L ?



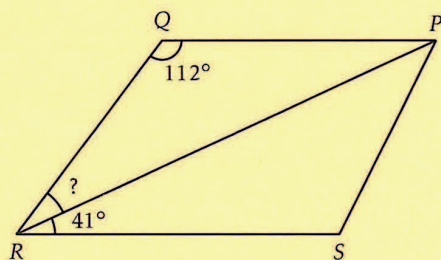
9. La moyenne arithmétique des nombres a , b et c est égale à 500 et la moyenne arithmétique des nombres d et e est égale à 2000. La moyenne arithmétique de ces cinq nombres est

- (A) 1275 (B) 1250 (C) 1200 (D) 1160 (E) 1100

10.
$$2022 - 2019 + 2016 - 2013 + 2010 - 2007 + \dots - 15 + 12 - 9 + 6 - 3 =$$

- (A) 337 (B) 338 (C) 674 (D) 1001 (E) 1011

11. Soit un trapèze quelconque $PQRS$ de bases $[PQ]$ et $[RS]$, comme sur la figure imprécise ci-dessous. Si $\widehat{SRP} = 41^\circ$ et $\widehat{PQR} = 112^\circ$, quelle est, en degrés, l'amplitude de \widehat{PRQ} ?



- (A) 27 (B) 39 (C) 41 (D) 63 (E) 68
12. Parmi les quatre dessins suivants, combien peuvent être tracés sans lever le crayon et sans repasser par un même trait ?
-
- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4
13. Pour tout réel x , soit $\lfloor x \rfloor$ le plus grand entier inférieur ou égal à x et $\lceil x \rceil$ le plus petit entier supérieur ou égal à x . Que vaut $\lceil x \rceil - \lfloor x \rfloor$?
- (A) Toujours -1 (D) Parfois -1 et parfois 0
 (B) Toujours 0 (E) Parfois 0 et parfois 1
 (C) Toujours 1
14. Si f est la fonction $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^3$, alors $f(f(f(f(x)))) =$
- (A) $4x^3$ (B) x^9 (C) x^{12} (D) x^{27} (E) x^{81}
15. Si n est un nombre naturel non nul, $n!$ est une abréviation pour $n \times (n-1) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$. Combien de nombres naturels qui sont des cubes divisent $3! \cdot 5! \cdot 7!$?
- (A) 2 (B) 3 (C) 5 (D) 6 (E) 12

16. Dans une école, les élèves peuvent pratiquer deux sports : du football et du basket. Un cinquième des élèves qui jouent au football jouent aussi au basket et un septième de ceux qui jouent au basket jouent aussi au football. Si 110 élèves pratiquent un seul de ces sports, combien pratiquent les deux ?

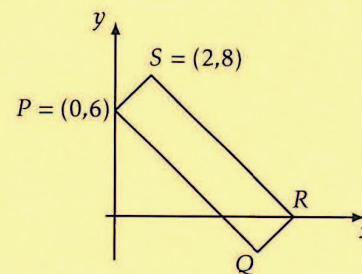
(A) 10 (B) 35 (C) 55 (D) 90 (E) Une autre valeur

17. *Sans réponse préformulée* — La division de 2022 par un naturel d donne un quotient égal à $d + 1$ et un reste égal à $d - 2$. Quel est ce diviseur d ?

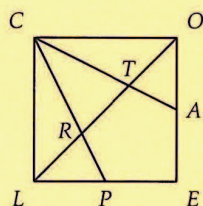
18. Un point du plan cartésien est dit *entier* si ses deux coordonnées sont des nombres entiers. Laquelle des affirmations suivantes est vraie ?

- (A) Toute droite du plan cartésien contient au moins un point entier.
 (B) Toute droite du plan cartésien passant par l'origine $(0, 0)$ contient au moins un autre point entier.
 (C) Toute droite du plan cartésien contenant deux points entiers en contient une infinité.
 (D) Il existe une droite du plan cartésien contenant exactement deux points entiers.
 (E) Il existe une droite du plan cartésien contenant exactement trois points entiers.

19. *Sans réponse préformulée* — Dans la figure ci-dessous, le point R appartient à l'axe des x du repère orthonormé. Quelle est l'aire du rectangle $PQRS$?



20. *Sans réponse préformulée* — Le sommet C du carré $CLEO$ est relié aux points P et A , milieux des côtés $[LE]$ et $[EO]$. Les droites CP et CA coupent la diagonale $[LO]$ en R et T . Si l'aire de $CLEO$ vaut 2022 unités, quelle est l'aire, dans cette même unité, du triangle CTR ?



21. Quelle fonction de \mathbb{R} vers \mathbb{R} parmi les suivantes a la propriété que son graphe rencontre chaque droite horizontale (parallèle à l'axe des x) exactement une fois ?

- (A) $x \mapsto x^2$ (D) $x \mapsto x^4$
 (B) $x \mapsto x^3$ (E) $x \mapsto |x|$
 (C) $x \mapsto (x-1)(x-2)(x-3)$

22. Dans le rectangle $ABCD$, $|AB| = 60$. Le point M est milieu de $[AB]$. Le point N est sur $[AD]$ avec $|AN| = 20$. Quelle est la longueur de $[AD]$ si le triangle MNC est rectangle en N ?

- (A) 70 (B) 90 (C) 110 (D) 120 (E) Une autre valeur

23. Parmi les nombres 2, 3, 5, 7 et 11, quels sont ceux qui *ne* sont pas diviseurs de $371^4 - 41^4$?

- (A) 3, 5, 7 et 11 (B) 2 (C) 2, 3, 5 et 11 (D) 7
 (E) Ils sont tous diviseurs de ce nombre.

24. *Sans réponse préformulée* — Mon petit frère enfile trois perles de couleurs différentes sur un ensemble de trois tiges verticales plantées sur un socle. La première tige est haute de trois perles, la seconde de deux perles et la troisième d'une seule perle ; chacune peut rester vide. Combien existe-t-il de dispositions des trois perles ?



25. Patrick et Manu ont mangé 6 abricots à eux deux, Caro et Patrick en ont mangé 4 à eux deux, Florence et Caro 7, Bob et Florence 4, et Bob et Manu 5. Combien d'abricots Bob a-t-il mangés ?

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

26. Laquelle de ces affirmations est vraie ?

- (A) $\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 - x \geq 0$ (D) $\forall n \in \mathbb{N} \quad n^2 - 3 \geq 0$
 (B) $\forall x \in \mathbb{R} \quad |x^3 - x| \geq 0$ (E) Aucune des précédentes
 (C) $\forall n \in \mathbb{N} \quad n^2 - 2n \geq 0$

27. Dans un bac se trouvent 8 paires de bottes du même modèle, toutes mélangées : 4 paires de pointure 27 et 4 paires de pointure 42. Je prends 2 bottes au hasard. Quelle est la probabilité que ce soit une paire assortie ? Précision : une paire assortie de bottes est constituée d'une botte gauche et d'une botte droite de même taille.

- (A) 1/12 (B) 1/8 (C) 1/5 (D) 1/4 (E) 4/15

28. *Sans réponse préformulée* — Quel est le chiffre des unités de la somme $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 2021^3 + 2022^3$?

29. *Sans réponse préformulée* — La somme des 7 premiers termes d'une suite arithmétique vaut 1001 et la somme du 8^e au 12^e terme vaut 205. Que vaut le 2^e terme de cette suite ?

30. *Sans réponse préformulée* — Un cycliste roule toujours à 21 km/h sur le plat, à 15 km/h en montée et à 35 km/h en descente. Pour aller d'Alpha-ville à Bêtabourg, il met 2 h 45 et pour revenir de Bêtabourg à Alpha-ville, par la même route, il met 3 h 15. Quelle distance sépare ces deux villes, en kilomètres ?