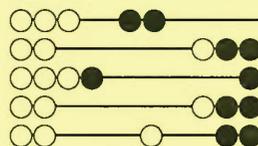




**OLYMPIADE
MATHÉMATIQUE BELGE**



Quarante-huitième Olympiade Mathématique Belge

Organisée par la Société Belge des Professeurs de Mathématique

Maxi éliminatoire 2023

INSTRUCTIONS

- N'ouvrez pas ce livret avant le signal de votre professeur.
- Vous indiquerez vos réponses au verso de cette page.
- Ce questionnaire contient 30 questions ; répondez à 5 questions au moins.
- Vingt-deux questions sont à choix multiple. Chacune est suivie de réponses désignées par (A), (B), (C), (D) et (E). Chaque question possède une seule réponse correcte. Décidez quelle est la réponse correcte parmi les cinq proposées et retenez la lettre majuscule correspondante. Sur la feuille réponse, écrivez cette lettre dans le cercle situé à droite du numéro de la question.
EXEMPLE : si vous estimez que la réponse correcte à la question numéro 17 est celle précédée de la lettre (D), vous écrirez D sur la feuille réponse, à droite du numéro 17, dans le cercle.
- Huit questions sont sans réponses préformulées. Dans ce cas, la réponse correcte est un nombre entier dans [0;999]. C'est ce nombre que vous écrirez dans la case rectangulaire de la feuille réponse.
- RÈGLES DE COTATION : Vous recevez 5 points par réponse correcte, 2 points par abstention et 0 point par réponse fausse. Avec ce système, deviner fera en moyenne diminuer votre score. Vous n'avez intérêt à deviner que si vous avez au moins une chance sur deux de bien choisir.
- Reportez les réponses au fur et à mesure que vous les obtenez. Écrivez au crayon (si vous changez d'avis, gomez la réponse). Du papier de brouillon, du papier millimétré, une règle, un compas, une gomme peuvent être utilisés. Les calculatrices et règles à calcul ne sont pas autorisées, de même que les livres et les notes personnelles.
- Au signal de votre professeur, détachez la feuille de couverture sans déchirer le questionnaire, retournez-la, couvrez-en les questions, puis inscrivez les informations demandées.
- Quand votre professeur vous l'indiquera, commencez le travail sur les problèmes. Vous disposez de 90 minutes.

Mercredi 18 janvier 2023

À REMPLIR PAR L'ÉLÈVE (en majuscules)

Nom :

Prénom :

Classe :

Adresse privée

Rue et n° :

Code postal et localité :

École

Nom (sans abréviations) :

Adresse

Rue et n° :

Code postal et localité :

CADRE RÉSERVÉ AU PROFESSEUR

Chaque réponse correcte a une valeur de 5 points et chaque abstention a une valeur de 2 points ; rien n'est déduit pour une réponse fausse. Le score total est calculé en prenant 5 fois le nombre de réponses correctes et en ajoutant 2 fois le nombre d'abstentions.

Réponses correctes : × 5 =

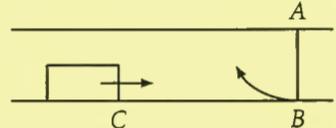
+

Abstentions : × 2 =

Score total :

1	<input type="radio"/>
2	<input type="radio"/>
3	<input type="radio"/>
4	<input type="radio"/>
5	<input type="text"/>
6	<input type="radio"/>
7	<input type="text"/>
8	<input type="radio"/>
9	<input type="text"/>
10	<input type="radio"/>
11	<input type="radio"/>
12	<input type="radio"/>
13	<input type="radio"/>
14	<input type="radio"/>
15	<input type="text"/>
16	<input type="radio"/>
17	<input type="radio"/>
18	<input type="radio"/>
19	<input type="radio"/>
20	<input type="radio"/>
21	<input type="radio"/>
22	<input type="radio"/>
23	<input type="radio"/>
24	<input type="text"/>
25	<input type="text"/>
26	<input type="radio"/>
27	<input type="text"/>
28	<input type="radio"/>
29	<input type="radio"/>
30	<input type="text"/>

1. $\frac{31^2 + 31}{31} =$
 (A) 32 (B) 33 (C) 35 (D) 37 (E) 63
2. Si $\frac{a}{b} = \frac{4}{7}$ et $\frac{b}{c} = \frac{7}{2}$, alors $\frac{a}{c} - \frac{c}{a} =$
 (A) 0 (B) $\frac{8}{49}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) $\frac{3}{2}$ (E) $\frac{49}{8}$
3. Lorsque je regarde un angle de 18° à la loupe de grossissement 2, je vois un angle de
 (A) 9° (B) $(9\sqrt{2})^\circ$ (C) 18° (D) $(18\sqrt{2})^\circ$ (E) 36°
4. Si l'aire d'un disque est $1/\pi$, quel est son diamètre?
 (A) $1/\pi$ (B) $2/\pi$ (C) 2 (D) π (E) 2π
5. *Sans réponse préformulée* — Pour laver la voiture, Inès met deux heures tandis que son frère Noam met trois heures. Combien de temps, en minutes, mettront-ils pour la laver ensemble?
6. Si $p = 1 + 2 + \dots + 99$ et $q = 1 + 2 + \dots + 100$, alors que vaut la racine carrée de $p + q$?
 (A) 100 (B) 101 (C) 200 (D) 201 (E) 400
7. *Sans réponse préformulée* — Quel est le plus petit nombre naturel à deux chiffres qui soit égal au produit de ses chiffres augmenté de leur somme?
8. Chez une brocanteuse, 2023 assiettes identiques sont réparties en 7 piles de hauteurs toutes différentes les unes des autres. Un restaurateur achète la plus haute pile. Quel est le nombre minimum d'assiettes qu'il emporte?
 (A) 202 (B) 286 (C) 289 (D) 292 (E) 302

9. *Sans réponse préformulée* — Phil joue à un jeu dont les règles sont les suivantes :
 — il démarre le jeu avec zéro point ;
 — s'il gagne une manche, il reçoit 3 points ;
 — s'il perd une manche, il doit rendre 4 points ;
 — il peut avoir un nombre négatif de points ;
 — il n'y a pas de manche nulle.
 Après 20 manches, Phil possède 11 points. Combien de manches a-t-il perdues?
10. Pour laquelle des valeurs de n ci-dessous le nombre $n^2 + (n+2)^2 + (n+4)^2$ est-il multiple de 10?
 (A) 2022 (B) 2023 (C) 2024 (D) 2025 (E) 2026
11. Combien de nombres entiers compris entre 1000 et 2000 ont leurs chiffres ordonnés par ordre strictement croissant? Par exemple, 1689 est un tel nombre car $1 < 6 < 8 < 9$.
 (A) 56 (B) 120 (C) 180 (D) 216 (E) 516
12. Vous glissez une table large de 1 m le long de la paroi rectiligne d'un couloir large de 2 m, comme sur la figure ci-dessous. Jusqu'à quelle distance de B, en mètres, pouvez-vous amener le coin C de la table, pour pouvoir encore ouvrir totalement la porte [AB]?

 The diagram shows a horizontal hallway with a door AB on the right wall. A table is shown on the left wall, with its corner C touching the right wall. A curved arrow indicates the table can rotate around its corner C.
 (A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (B) $\sqrt{2}$ (C) $\sqrt{3}$ (D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (E) 2
13. Lors du lancer de deux dés à six faces non truqués, quelles sont les chances que ces deux dés affichent la même valeur?
 (A) Une chance sur deux (D) Une chance sur douze
 (B) Une chance sur trois (E) Une chance sur trente-six
 (C) Une chance sur six

14. Combien existe-t-il de nombres naturels de 1 à 5 chiffres tous différents et choisis parmi les chiffres 1, 2, 3, 4, 5?

- (A) 205 (B) 325 (C) 400 (D) 925 (E) 3905

15. Sans réponse préformulée — Si $f\left(\frac{x}{10}\right) = 3x + 10$ pour tout nombre réel x , alors quel est le nombre y qui satisfait $f(y) = 1210$?

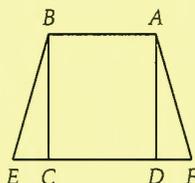
16. Dans une bouteille, j'ai versé 10 cL de sirop et 90 cL d'eau. Quelle quantité de sirop dois-je ajouter pour avoir une concentration en sirop de 20%?

- (A) 5 cL (B) 7,5 cL (C) 10 cL (D) 12,5 cL (E) 20 cL

17. Dans une course, les coureurs les plus proches de l'arrivée sont, dans cet ordre : Anna, Boris, Clémentine et Diego. Après quelques dépassements, l'ordre est maintenant : Clémentine, Boris, Diego et Anna. Combien y a-t-il eu de dépassements au minimum?

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

18. Sur la figure ci-dessous, $ABCD$ est un rectangle et $ABEF$ un trapèze isocèle, avec $|EF| = 8$ cm, $|BC| = 5$ cm et $|AB| = a$ cm. Pour quelles valeurs de a l'aire du rectangle est-elle strictement supérieure au quart de l'aire du trapèze?



- (A) $a > \frac{7}{9}$ (B) $a > \frac{7}{8}$ (C) $a > \frac{8}{7}$ (D) $a > \frac{9}{7}$ (E) Jamais

19. Quatre de ces nombres sont égaux entre eux. Quel est le cinquième?

- (A) 8×4^{1010} (D) $4^{(2^{10})} \times 2^{-(5^2)}$
 (B) $(2^{17})^{119}$ (E) $(2^{1024})^2 \times (8^{-11})^{-3}$
 (C) $2^{2000} \times 2^{23}$

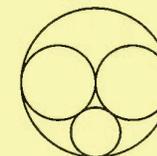
20. Entre midi et minuit, à combien de reprises les aiguilles des heures et des minutes forment-elles un angle droit?

- (A) 22 (B) 23 (C) 24 (D) 25 (E) 26

21. Le polynôme $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ admet les racines 1, 2, 3 et 4. Alors quel polynôme parmi les suivants admet les racines -1, -2, -3 et -4?

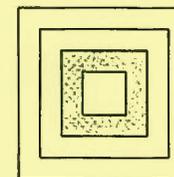
- (A) $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx - e$ (D) $ax^4 - bx^3 - cx^2 - dx + e$
 (B) $ax^4 - bx^3 + cx^2 - dx + e$ (E) $ax^4 - bx^3 - cx^2 - dx - e$
 (C) $ax^4 - bx^3 - cx^2 + dx + e$

22. Le masque de carnaval représenté ci-contre est un disque de 24 cm de diamètre. Les yeux sont deux disques tangents entre eux au centre du masque. La bouche est un disque également. Chaque disque est tangent aux 3 autres. Quel est le rayon du disque représentant la bouche, en centimètres?



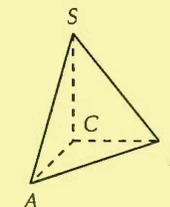
- (A) π (B) $2\sqrt{3}$ (C) 4 (D) $4\pi/3$ (E) $2\sqrt{5}$

23. Sur la figure ci-contre, les côtés des carrés mesurent c , $2c$, $3c$ et $4c$, avec c un nombre réel strictement positif. Quelle proportion de la surface du plus grand carré est occupée par la zone ombrée?



- (A) $\frac{1}{16}$ (B) $\frac{3}{16}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{7}{16}$ (E) 3

24. Sans réponse préformulée — Soit une pyramide $SABC$ de hauteur $|SC|$ et dont la base est un triangle isocèle ABC rectangle en C dont l'hypoténuse mesure $\sqrt{72}$ cm. L'arête latérale $[SA]$ mesure 10 cm. Que vaut, en centimètres cubes, le volume de la pyramide?



25. Sans réponse préformulée — Dans la marche d'Echternach, après trois pas en avant, le marcheur fait deux pas en arrière, puis à nouveau trois pas en avant et deux pas en arrière, et ainsi de suite. Si la distance à couvrir est de 100 m et si chaque pas fait 70 cm, combien de pas fera le marcheur avant que son pied se pose pour la première fois derrière la ligne d'arrivée?

26. Harriet Pitter - la cousine de l'autre! - ensorçèle un nombre en calculant la somme de 1 et de l'inverse de l'opposé de ce nombre. Tout nombre réel x différent de 0 et de 1, s'il est ensorçélé 2023 fois, devient :

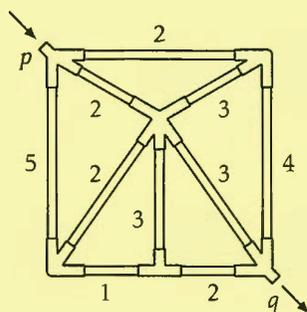
- (A) x (B) $\frac{x-1}{x}$ (C) $\frac{1}{1-x}$ (D) $\frac{1}{x-1}$ (E) $\frac{x+1}{x}$

27. *Sans réponse préformulée* — Déterminer le nombre de valeurs entières de k telles que la fraction $\frac{6k+9}{2k+1}$ a une valeur entière.

28. Le segment $[EF]$ est le diamètre d'un demi-cercle de rayon r . Sur $[EF]$, les points A et B sont tels que $|EA| = \frac{r}{3} = |FB|$. Sur l'arc de demi-cercle, les points C et D sont tels que $ABCD$ est un rectangle. Quelle est l'aire de ce rectangle?

- (A) $\frac{\sqrt{5}}{3}r^2$ (B) $\frac{3\sqrt{2}}{4}r^2$ (C) r^2 (D) $\frac{\sqrt{3}}{2}r^2$ (E) $\frac{4\sqrt{5}}{9}r^2$

29. Voici un plan de canalisations d'eau, avec pour chaque tuyau sa capacité d'écoulement par unité de temps (la même dans les deux sens de circulation). Si l'eau entre dans le système en p depuis suffisamment longtemps, quelle est la plus grande quantité d'eau par unité de temps qui puisse sortir du système en q de manière constante?



- (A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8 (E) 9

30. *Sans réponse préformulée* — Marie range du plus petit au plus grand tous les nombres de 4 chiffres dont la somme des chiffres est 7. Quelle est la place de 2023?