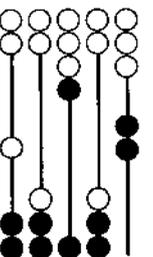


OMB

**OLYMPIADE
MATHÉMATIQUE BELGE**



Trente-huitième Olympiade Mathématique Belge
Organisée par la Société Belge des Professeurs de Mathématique

Midi demi-finale 2013

INSTRUCTIONS

1. N'ouvrez pas ce livret avant le signal de votre professeur.
2. Vous indiquerez vos réponses au verso de cette page.
3. Ce questionnaire contient 30 questions ; répondez à 5 questions au moins.
4. Dix-huit questions sont à choix multiple. Chacune est suivie de réponses désignées par **(A)**, **(B)**, **(C)**, **(D)** et **(E)**. Chaque question possède une seule réponse correcte. Décidez quelle est la réponse correcte parmi les cinq proposées et reprenez la lettre majuscule correspondante. Sur la feuille réponse, écrivez cette lettre dans le cercle situé à droite du numéro de la question.
EXEMPLE : si vous estimez que la réponse correcte à la question numéro 17 est celle précédée de la lettre **(D)**, vous écrirez **D** sur la feuille réponse, à droite du numéro 17, dans le cercle.
5. Douze questions sont sans réponses préformulées. Dans ce cas, la réponse correcte est un nombre entier dans $[0; 999]$. C'est ce nombre que vous écrivez dans la case rectangulaire de la feuille réponse.
6. **RÈGLES DE COTATION** : Vous recevrez 5 points par réponse correcte, 2 points par abstention et 0 point par réponse fausse. Avec ce système, deviner fera en moyenne diminuer votre score. Vous n'avez intérêt à deviner que si vous avez au moins une chance sur deux de bien choisir.
7. Reportez les réponses au fur et à mesure que vous les obtenez. Écrivez au crayon (si vous changez d'avis, gomez la réponse). Du papier de brouillon, du papier millimétré, une règle, un compas, une gomme peuvent être utilisés. Les calculatrices et règles à calcul ne sont pas autorisées, de même que les livres et les notes personnelles.
8. Au signal de votre professeur, détachez la feuille de couverture sans déchirer le questionnaire, retournez-la, couvrez-en les questions, puis inscrivez les informations demandées.
9. Quand votre professeur vous l'indiquera, commencez le travail sur les problèmes. Vous disposez de 90 minutes.

Mercredi 27 février 2013

À REMPLIR PAR L'ÉLÈVE (en majuscules)

Nom :

Prénom :

Classe :

Adresse privée

Rue et n° :

Code postal et localité :

École
Nom (sans abréviations) :

Adresse

Rue et n° :

Code postal et localité :

CADRE RÉSERVÉ AU PROFESSEUR

Chaque réponse correcte a une valeur de 5 points et chaque abstention a une valeur de 2 points ; rien n'est déduit pour une réponse fautive. Le score total est calculé en prenant 5 fois le nombre de réponses correctes et en ajoutant 2 fois le nombre d'abstentions.

Réponses correctes :

$\times 5 =$

+

Abstentions :

$\times 2 =$

Score total :

1

2

3

4

5

6

7

8

9

10

11

12

13

14

15

16

17

18

19

20

21

22

23

24

25

26

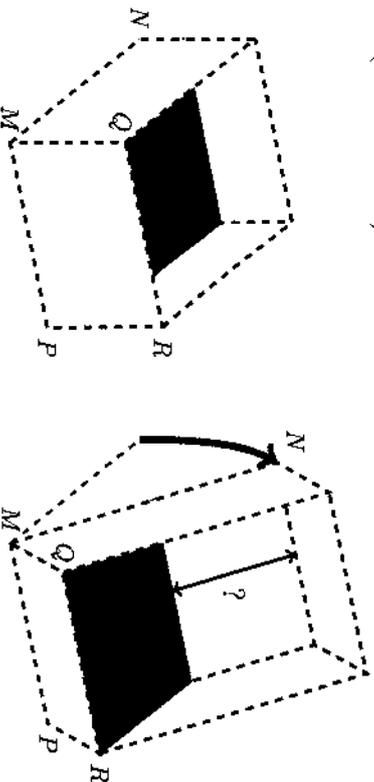
27

28

29

30

29. Sans réponse préformulée — Un caisson a la forme d'un parallélépipède rectangle de longueur $|MN| = 180$ cm, de largeur $|MP| = 128$ cm et de hauteur $|MQ| = 80$ cm. Déposé sur une table horizontale, il contient de l'eau sur une hauteur de 30 cm. Je le relève en le faisant pivoter autour de MP , qui reste sur la table, jusqu'à ce que le bord de l'eau atteigne l'arête supérieure QR . De quelle longueur l'eau s'est-elle retirée sur la base (en centimètres) ?



30. Sans réponse préformulée — Soit un rectangle $ABCD$ et E un point de $[AB]$ tel que $|AE| = 60$ mm et $|EB| = 40$ mm. Sur $[CD]$ se trouve un point F . Sachant que l'aire du trapèze $AEFD$ vaut les deux tiers de l'aire du trapèze $EBCF$, que vaut la longueur $|DF|$, en millimètres ?

Les participants sélectionnés pour la finale recevront par l'intermédiaire de leur école une fiche qu'ils devront compléter. Le jour de la finale, ils se muniront de cette fiche ainsi que de leur carte d'identité.

22. Quel est le plus petit nombre naturel ayant exactement 18 diviseurs ?

- (A) 120 (B) 288 (C) 300 (D) 450 (E) Une autre réponse

23. Sur une étagère, un libraire a rangé 31 livres, de gauche à droite, par ordre de prix croissants. L'écart entre les prix de deux livres voisins est chaque fois de deux euros. Pour le livre situé à l'extrémité droite, un acheteur paiera le même prix que pour le livre du milieu et l'un de ses voisins. Dans ces conditions,

- (A) Le voisin en question est le voisin de gauche ;
(B) Le livre du milieu coûte 36 euros ;
(C) Le livre le moins cher coûte 4 euros ;
(D) Le livre le plus cher coûte 64 euros ;
(E) Aucune des affirmations précédentes n'est correcte.

24. De combien de manières différentes un rectangle 12×1 peut-il être pavé par des rectangles de tailles 2×1 ou 3×1 ? (Un nombre suffisant de rectangles de chacun des deux types est disponible.)

- (A) 3 (B) 5 (C) 9 (D) 11 (E) 12

25. Sans réponse préformulée — Si a, b, \dots, d sont des chiffres, $\overline{ab\dots d}$ désigne le naturel dont l'écriture décimale est constituée de ces chiffres, dans cet ordre. Quel est le naturel de trois chiffres \overline{abc} tel que $\overline{abc} = \overline{ab} + \overline{bc} + \overline{ca}$?

26. Une des hauteurs d'un triangle équilatéral d'aire 1200 est un côté d'un deuxième triangle équilatéral ; une des hauteurs de celui-ci est un côté d'un troisième triangle équilatéral. Quelle est l'aire de ce troisième triangle ?

- (A) $600\sqrt{3}$ (B) 900 (C) 800 (D) 675 (E) 600

27. Si a, b et c sont les longueurs des côtés d'un triangle, alors l'expression $(a + b - c)(a - b + c)(-a + b + c)$

- (A) Est toujours négative ;
(B) Est toujours positive ;
(C) Est positive uniquement lorsque le triangle est acutangle ;
(D) Est positive uniquement lorsque le triangle est obtusangle.
(E) Aucune des réponses précédentes.

28. Sans réponse préformulée — Si, dans un repère orthonormé, l'unité de longueur est le centimètre, quelle est, en centimètres carrés, l'aire d'un triangle dont les coordonnées des sommets sont $(-2, -4)$, $(2, 8)$ et $(10, 2)$?

1. Sans réponse préformulée — Un nombre de deux chiffres diminue de 27 quand on renverse l'ordre de ses chiffres. Si la somme de ses chiffres est 13, quel est le nombre de départ ?

2. Sans réponse préformulée — Chacun des naturels de 1 à 10 est multiplié par chacun des naturels de 1 à 10. Parmi les 100 produits obtenus, combien sont impairs ?

3. Sachant qu'un nombre est un multiple de 10, augmenté de 7, quel est le reste de sa division par 5 ?

- (A) 0 (B) 2 (C) 4 (D) 7 (E) Cela dépend du nombre.

4. Sans réponse préformulée — La somme de deux nombres naturels est 222. Quel est le plus grand de ces nombres s'il dépasse de 2 unités le triple du petit ?

5. $50^{90} / 100^{15} =$

- (A) $\frac{1}{2}$ (B) 1 (C) 2 (D) 5^{15} (E) 25^{15}

6. Anaximandre représente la première génération d'une famille. S'il a eu deux enfants qui ont eux aussi eu chacun deux enfants et ainsi de suite, combien de descendants d'Anaximandre composent la onzième génération ? (Il est supposé que deux quelconques de ces descendants n'ont jamais procréé ensemble.)

- (A) 512 (B) 1024 (C) 2048 (D) 4096 (E) 8192

7. Si le prix d'une marchandise A est supérieur de 50 % à celui d'une marchandise B , de quel pourcentage le prix de la marchandise B est-il inférieur à celui de A ?

- (A) 75 % (B) 50 % (C) 33,33... % (D) 25 %
(E) Les données sont insuffisantes pour déterminer la réponse.

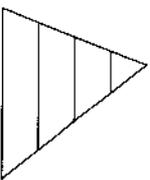
8. Deux arêtes sont gauches si aucun plan de l'espace ne les contient toutes les deux. Combien des arêtes d'un cube sont gauches avec une arête choisie ?

- (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

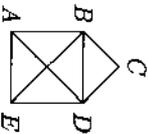
9. Un matin, Yann proclamé : « La prochaine phrase de Zoé sera un mensonge. » et Zoé lui répond immédiatement : « Yann vient d'énoncer une vérité. ». Alors,

- (A) Yann a dit vrai ;
- (B) Yann a menti ;
- (C) Zoé a dit vrai ;
- (D) Zoé a menti ;
- (E) La conversation décrite est globalement contradictoire.

10. Sans réponse préformulée — Si $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \dots - \frac{1}{1024} = \frac{x}{1024}$ que vaut x ?



11. Sans réponse préformulée — Dans un triangle acutangle de base 8 et de hauteur 40, sont tracées trois parallèles à la base ; elles déterminent trois trapèzes de hauteur 10. Dans chacun de ces trois trapèzes est inscrit le plus grand rectangle possible (avec deux côtés inclus dans les bases du trapèze). Quelle est l'aire totale des trois rectangles ?



12. La figure ci-contre est dessinée sans lever le crayon ni repasser deux fois sur le même trait. Laquelle des affirmations suivantes est vraie ?

- (A) Le début et la fin du tracé sont en C.
- (B) Le tracé commence en A et se termine en E ou inversement.
- (C) Le tracé commence en B et se termine en D ou inversement.
- (D) Le tracé commence en A et se termine en D ou inversement.
- (E) Le tracé commence, au choix, en A, B, C, D ou E.

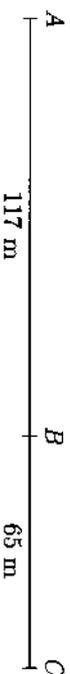
13. Solange a 22 bouteilles identiques de jus. Avec 14 de ces bouteilles, elle remplit exactement 35 petits verres et avec les 8 bouteilles restantes, elle remplit exactement 12 grands verres. Quel est le rapport du volume d'un grand verre à celui d'un petit ?

- (A) 1
- (B) 5/3
- (C) 3/2
- (D) 7/4
- (E) 4/7

14. Si l'objet que j'ai sur la tête n'est pas un chapeau marron, alors cet objet, nécessairement,

- (A) Est un chapeau melon ;
- (B) N'est pas un chapeau ;
- (C) N'est pas marron ;
- (D) N'est pas un chapeau et n'est pas marron ;
- (E) N'est pas un chapeau ou n'est pas marron.

15. Avant une tempête, le long d'une route rectiligne, des poteaux étaient plantés régulièrement à égale distance (distance exprimée par un nombre entier de mètres, supérieur à 10). Après la tempête, sur un certain tronçon, il ne reste que trois poteaux : en A, en B et en C.



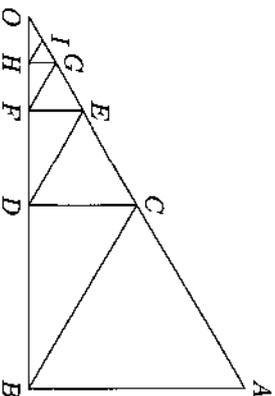
Combien de poteaux ont été attachés entre A et C ?

- (A) 10
- (B) 12
- (C) 13
- (D) 14
- (E) 16

16. Rappelons que a^b signifie $a^{(b^a)}$. Que vaut la racine carrée de $16^{16^{16}}$?

- (A) $4^{16^{16}}$
- (B) $16^{4^{16}}$
- (C) 16^{16^4}
- (D) $16^{8^{16}}$
- (E) 16^{16^8}

17. Sans réponse préformulée — Le triangle OAB est rectangle en B. Les points C, E, G et I sont situés sur le côté [AO] et les points D, F, H sont situés sur le côté [OB] ; les triangles ABC, CDE, EFG et GHI sont équilatéraux. Quel est le rapport de l'aire du triangle ABC à celle du triangle GHI ?



18. Sans réponse préformulée — Quelle est la racine carrée de la somme de tous les naturels impairs inférieurs à 100 ?

19. Que vaut l'angle des droites prolongeant les côtés [AB] et [DE] d'un pentagone régulier ABCDE ?

- (A) 30°
- (B) 32°
- (C) 35°
- (D) 36°
- (E) 40°

20. Sans réponse préformulée — Les nombres entiers a , b , c et d sont tels que $a < 2b$, $b < 3c$, $c < 4d$ et $d < 40$. Quelle est la valeur maximale de a ?

21. Quel est le nombre de chiffres du plus petit multiple non nul de 175 formé uniquement des chiffres 0 et 1 ?

- (A) 6
- (B) 7
- (C) 11
- (D) 12
- (E) Un nombre strictement supérieur à 12