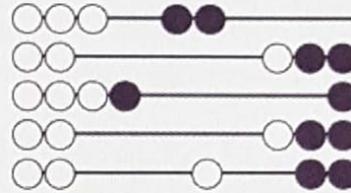




**OLYMPIADE
MATHEMATIQUE BELGE**



Quarante-troisième Olympiade Mathématique Belge

Organisée par la Société Belge des Professeurs de Mathématique

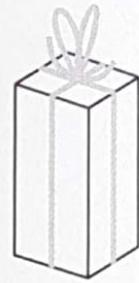
Midi demi-finale 2018

INSTRUCTIONS

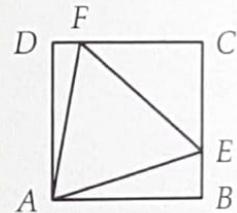
1. N'ouvrez pas ce livret avant le signal de votre professeur.
2. Vous indiquerez vos réponses au verso de cette page.
3. Ce questionnaire contient 30 questions ; répondez à 5 questions au moins.
4. Quinze questions sont à choix multiple. Chacune est suivie de réponses désignées par **(A)**, **(B)**, **(C)**, **(D)** et **(E)**. Chaque question possède une seule réponse correcte. Décidez quelle est la réponse correcte parmi les cinq proposées et reprenez la lettre majuscule correspondante. Sur la feuille réponse, écrivez cette lettre dans le cercle situé à droite du numéro de la question.
EXEMPLE : si vous estimez que la réponse correcte à la question numéro 17 est celle précédée de la lettre **(D)**, vous écrirez D sur la feuille réponse, à droite du numéro 17, dans le cercle.
5. Quinze questions sont sans réponses préformulées. Dans ce cas, la réponse correcte est un nombre entier dans $[0; 999]$. C'est ce nombre que vous écrirez dans la case rectangulaire de la feuille réponse.
6. RÈGLES DE COTATION : Vous recevez 5 points par réponse correcte, 2 points par abstention et 0 point par réponse fautive. Avec ce système, deviner fera en moyenne diminuer votre score. Vous n'avez intérêt à deviner que si vous avez au moins une chance sur deux de bien choisir.
7. Reportez les réponses au fur et à mesure que vous les obtenez. Écrivez au crayon (si vous changez d'avis, gomez la réponse). Du papier de brouillon, du papier millimétré, une règle, un compas, une gomme peuvent être utilisés. Les calculatrices et règles à calcul ne sont pas autorisées, de même que les livres et les notes personnelles.
8. Au signal de votre professeur, détachez la feuille de couverture sans déchirer le questionnaire, retournez-la, couvrez-en les questions, puis inscrivez les informations demandées.
9. Quand votre professeur vous l'indiquera, commencez le travail sur les problèmes. Vous disposez de 90 minutes.

Mercredi 28 février 2018

8. *Sans réponse préformulée* — Outre les diagonales de ses faces, un cube a de grandes diagonales qui joignent deux sommets en passant par le centre du cube. Combien sont-elles ?
9. *Sans réponse préformulée* — Quel est le plus grand nombre entier qui divise tous les produits $n(n+2)(n+4)$ où n est un naturel pair non nul ?
10. *Sans réponse préformulée* — Si $OLYMP$ est un pentagone régulier convexe, quelle est, en degrés, l'amplitude de \widehat{MOY} ?
11. *Sans réponse préformulée* — Un cadeau en forme de prisme à base carrée est entouré, comme sur la figure ci-contre, d'un ruban de 68 cm, dont 20 cm pour le nœud de décoration. Sachant que la hauteur est le double du côté de la base, quel est, en centimètres cubes, le volume du cadeau ?



12. *Sans réponse préformulée* — Dans le carré $ABCD$ représenté ci-contre, $|DF| = 3$ et $|BE| = 5$. Que mesure le côté du carré si la somme des aires des triangles ADF et ABE est égale à l'aire du triangle CEF ?



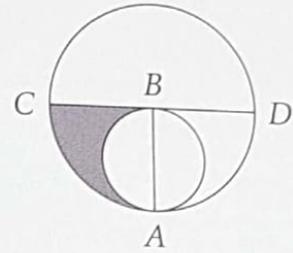
13. Tous les soirs, Albert va rechercher sa femme Louise à son travail. Les trajets aller ou retour sont chacun de 5 km et prennent chacun 10 min en voiture, à vitesse constante. Un soir, Louise quitte son travail plus tôt et se dirige à pied vers sa maison. Albert la rencontre et la charge en voiture avant de retourner chez eux. Le trajet aller-retour d'Albert est ainsi raccourci de 8 min. Quelle distance Louise a-t-elle parcourue à pied ?

- (A) 2 km (B) 2,1 km (C) 2,2 km (D) 2,5 km (E) 3 km

14. $\sqrt{27} + \sqrt{12} =$

- (A) $\sqrt{39}$; (B) $\sqrt{75}$; (C) $\sqrt{150}$; (D) $\sqrt{324}$.
 (E) Aucune des réponses précédentes

15. Dans la figure ci-contre, les deux cercles sont tangents en A ; leurs rayons sont R et $R/2$. Le segment $[AB]$ est un diamètre du petit cercle et $[CD]$ lui est tangent. Quelle est l'aire de la partie ombrée ?

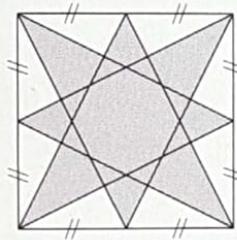


- (A) $\frac{\pi}{8}R^2$ (B) $\frac{3\pi}{16}R^2$ (C) $\frac{\pi}{4}R^2$ (D) $\frac{5\pi}{16}R^2$ (E) $\frac{3\pi}{8}R^2$

16. $2^{2n+1} + 4^{n+2} =$

- (A) 6^{3n+3} (B) 4^{2n+3} (C) $9 \times 2^{2n+1}$ (D) $5 \times 2^{4n+6}$ (E) $5 \times 4^{n+3}$

17. Quelle est l'aire de la forme étoilée, ombrée, inscrite dans ce carré de côté a ?



- (A) $\frac{2}{5}a^2$ (B) $\frac{3}{5}a^2$ (C) $\frac{4}{5}a^2$ (D) $\frac{7}{10}a^2$ (E) $\frac{11}{10}a^2$

18. *Sans réponse préformulée* — Le jacuzzi d'un hôtel peut être rempli par trois robinets. Le premier robinet, seul, remplit le jacuzzi en 9 heures, le deuxième en 12 heures et le troisième en 18 heures. Pour gagner du temps, l'hôtelier ouvre simultanément les trois robinets. En combien d'heures le jacuzzi sera-t-il rempli ?

19. Que vaut $a^2 + b^2$ si (a, b) est une solution du système suivant ?

$$\begin{cases} ab = 5 \\ a^2b + ab^2 + 2a + 2b = 42 \end{cases}$$

- (A) 26 (B) 36 (C) 37 (D) $\frac{1764}{25}$ (E) $\frac{1514}{25}$

20. *Sans réponse préformulée* — Les milieux des côtés d'un hexagone régulier sont les sommets d'un nouvel hexagone. L'aire de ce dernier est $p\%$ de celle de l'hexagone initial. Que vaut p ?

21. Un arboriculteur a rempli 185 conteneurs de pommes : dans chacun d'eux, entre 125 et 145 pommes. Il affirme que c de ces conteneurs comptent le même nombre de pommes. Quelle est la plus grande valeur de c pour laquelle son affirmation est nécessairement correcte ?

- (A) 10 (B) 9 (C) 8 (D) 7 (E) 6

22. Un jeans de marque *Bitore* est composé de $0,5 \text{ m}^2$ de tissu et de deux trous aux genoux dont la surface totale représente 15 % de la surface de tissu. À chaque lavage, par usure, 5 cm^2 de tissu sont remplacés par 5 cm^2 de trou. Après combien de lavages y aura-t-il plus de trou que de tissu ?

- (A) Entre 0 et 100 (D) Entre 300 et 400
 (B) Entre 100 et 200 (E) Entre 400 et 500
 (C) Entre 200 et 300

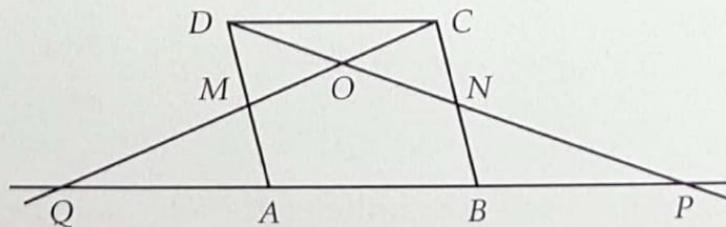
23. *Sans réponse préformulée* — Dans un triangle rectangle, les médianes tracées à partir des deux angles aigus mesurent 19 et 22 respectivement. Que mesure l'hypoténuse ?

24. Quel est le reste de la division euclidienne de $x^{19} + 1$ par $x^2 - 1$?

- (A) 0 (B) 1 (C) $x + 1$ (D) $x - 1$ (E) Une autre réponse

25. *Sans réponse préformulée* — Combien existe-t-il de couples (x, y) de naturels tels que $x^2 - y^2 = 1600$?

26. L'aire du parallélogramme $ABCD$ est 8. Les points M et N sont respectivement les milieux de $[AD]$ et de $[BC]$. Les droites CM et DN coupent AB respectivement en Q et en P . Le point O est l'intersection de DP et CQ . Que vaut l'aire du triangle OPQ ?



- (A) 7,5 (B) 8 (C) 8,5 (D) 9 (E) 9,5

27. *Sans réponse préformulée* — Quelle est la plus grande valeur du naturel n pour laquelle $\frac{n^2 - 6n + 9}{n + 17}$ est un nombre entier ?

28. Si le triangle ABC est inscrit dans un demi-cercle de diamètre $[AB]$, alors nécessairement :

- (A) $|AC|^2 + |BC|^2 < |AB|^2 / \sqrt{2}$; (D) $|AC| + |BC| \geq |AB| \sqrt{2}$.
(B) $|AC|^2 + |BC|^2 > \sqrt{2} |AB|^2$; (E) Aucune de ces inégalités
(C) $|AC| + |BC| \leq |AB| \sqrt{2}$;

29. *Sans réponse préformulée* — Que vaut la somme des coefficients dans l'expression développée de $(a + b)^9$, si les coefficients 1 ne sont pas pris en compte ?

30. Le système

$$\begin{cases} cx + y = 3 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

a une solution unique (x, y) qui se trouve dans le premier quadrant ouvert (c'est-à-dire la partie du plan déterminée par $x > 0$ et $y > 0$) si et seulement si

- (A) $c = -1$ (B) $c > -1$ (C) $c < \frac{3}{2}$ (D) $0 < c < \frac{3}{2}$ (E) $-1 < c < \frac{3}{2}$

Les participants sélectionnés pour la finale recevront par l'intermédiaire de leur école une fiche qu'ils devront compléter. Le jour de la finale, ils se muniront de cette fiche ainsi que de leur carte d'identité.

OLYMPIADE MATHÉMATIQUE BELGE

Midi demi-finale 2018

Grille des réponses

Voici les réponses du questionnaire de la Midi demi-finale 2018 (élèves de 3^e et 4^e).

Utiliser le signe \checkmark pour une réponse correcte, une croix \times pour une réponse fautive et un cercle \circ pour une abstention.

Introduire, dans la case réservée à cet effet sur la feuille de l'élève, le nombre de **réponses correctes** et le nombre d'**abstentions**. Les réponses fausses ne sont pas reportées.

Calculer le score de l'élève en utilisant la formule indiquée sur la feuille de l'élève.

- 1 D
- 2 D
- 3
- 4
- 5
- 6
- 7 E
- 8
- 9
- 10
- 11
- 12
- 13 A
- 14 B
- 15 A
- 16 C
- 17 B
- 18
- 19 A
- 20
- 21 B
- 22 E
- 23
- 24 C
- 25
- 26 D
- 27
- 28 C
- 29
- 30 E