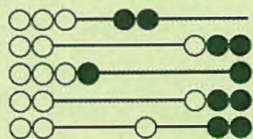




**OLYMPIADE
MATHÉMATIQUE BELGE**



Quarante-quatrième Olympiade Mathématique Belge

Organisée par la Société Belge des Professeurs de Mathématique

Midi demi-finale 2019

INSTRUCTIONS

- N'ouvrez pas ce livret avant le signal de votre professeur.
- Vous indiquerez vos réponses au verso de cette page.
- Ce questionnaire contient 30 questions ; répondez à 5 questions au moins.
- Quinze questions sont à choix multiple. Chacune est suivie de réponses désignées par **(A)**, **(B)**, **(C)**, **(D)** et **(E)**. Chaque question possède une seule réponse correcte. Décidez quelle est la réponse correcte parmi les cinq proposées et retenez la lettre majuscule correspondante. Sur la feuille réponse, écrivez cette lettre dans le cercle situé à droite du numéro de la question.
EXEMPLE : si vous estimez que la réponse correcte à la question numéro 17 est celle précédée de la lettre **(D)**, vous écrirez D sur la feuille réponse, à droite du numéro 17, dans le cercle.
- Quinze questions sont sans réponses préformulées. Dans ce cas, la réponse correcte est un nombre entier dans $[0; 999]$. C'est ce nombre que vous écrirez dans la case rectangulaire de la feuille réponse.
- RÈGLES DE COTATION** : Vous recevez 5 points par réponse correcte, 2 points par abstention et 0 point par réponse fausse. Avec ce système, deviner fera en moyenne diminuer votre score. Vous n'avez intérêt à deviner que si vous avez au moins une chance sur deux de bien choisir.
- Reportez les réponses au fur et à mesure que vous les obtenez. Écrivez au crayon (si vous changez d'avis, gomez la réponse). Du papier de brouillon, du papier millimétré, une règle, un compas, une gomme peuvent être utilisés. Les calculatrices et règles à calcul ne sont pas autorisées, de même que les livres et les notes personnelles.
- Au signal de votre professeur, détachez la feuille de couverture sans déchirer le questionnaire, retournez-la, couvrez-en les questions, puis inscrivez les informations demandées.
- Quand votre professeur vous l'indiquera, commencez le travail sur les problèmes. Vous disposez de 90 minutes.

Mercredi 27 février 2019

À REMPLIR PAR L'ÉLÈVE (en majuscules)

Nom :

Prénom :

Classe :

Adresse privée

Rue et n° :

Code postal et localité :

École

Nom (sans abréviations) :

Adresse

Rue et n° :

Code postal et localité :

CADRE RÉSERVÉ AU PROFESSEUR

Chaque réponse correcte a une valeur de 5 points et chaque abstention a une valeur de 2 points ; rien n'est déduit pour une réponse fausse. Le score total est calculé en prenant 5 fois le nombre de réponses correctes et en ajoutant 2 fois le nombre d'abstentions.

Réponses correctes : × 5 =

+

Abstentions : × 2 =

Score total :

1	<input type="text"/>
2	<input type="text"/>
3	<input type="radio"/>
4	<input type="text"/>
5	<input type="text"/>
6	<input type="radio"/>
7	<input type="radio"/>
8	<input type="text"/>
9	<input type="radio"/>
10	<input type="radio"/>
11	<input type="radio"/>
12	<input type="radio"/>
13	<input type="text"/>
14	<input type="radio"/>
15	<input type="radio"/>
16	<input type="radio"/>
17	<input type="text"/>
18	<input type="radio"/>
19	<input type="radio"/>
20	<input type="text"/>
21	<input type="text"/>
22	<input type="radio"/>
23	<input type="text"/>
24	<input type="radio"/>
25	<input type="text"/>
26	<input type="radio"/>
27	<input type="text"/>
28	<input type="text"/>
29	<input type="text"/>
30	<input type="text"/>

1. *Sans réponse préformulée* — La somme de trois nombres naturels consécutifs vaut 24. Que vaut leur produit ?

2. *Sans réponse préformulée* — Que vaut $2021 \times 2019 - 2018 \times 2022$?

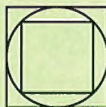
3. Si r est un réel strictement négatif, alors $|r - 1|$ est égal à :

- (A) $r - 1$ (B) $-r - 1$ (C) $1 - r$ (D) $1 + r$
 (E) Aucune des réponses précédentes

4. *Sans réponse préformulée* — Vingt garçons participent à la fête du carnaval. Neuf d'entre eux sont habillés en fantômes. Mais au total douze participants sont habillés en fantômes. Cinq participants ne sont ni des garçons ni habillés en fantômes. Combien y a-t-il de participants ?

5. *Sans réponse préformulée* — Combien les nombres 288 et 324 ont-ils de diviseurs positifs communs ?

6. Deux carrés sont l'un circonscrit et l'autre inscrit à un cercle. Que vaut le rapport de l'aire du grand carré à celle du petit ?



- (A) π (B) 2 (C) $\pi/2$ (D) $3/2$ (E) $\sqrt{2}$

7. Lors des soldes, le prix d'un article a été diminué, deux fois successivement, de 50 %. Quelle hausse le ramènerait à son prix initial ?

- (A) Une hausse de 50 % (D) Une hausse de 250 %
 (B) Une hausse de 100 % (E) Une hausse de 300 %
 (C) Une hausse de 200 %

8. *Sans réponse préformulée* — L'octogone ci-contre a ses sommets aux tiers des côtés du carré. Si le côté du carré mesure 18 cm, que mesure, en centimètres carrés, l'aire de l'octogone ?



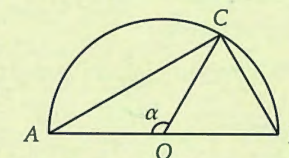
9. Quel est le chiffre des unités de 2019^{2019} ?

- (A) 1 (B) 3 (C) 5 (D) 7 (E) 9

10. Les deux nombres 10101010 et 1010101 sont formés respectivement de 8 et 7 chiffres. Que vaut leur différence ?

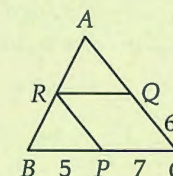
- (A) 1999999 (B) 8080809 (C) 8090909 (D) 9090909 (E) 9999999

11. Dans un demi-cercle de centre O et de diamètre $[AB]$ est inscrit un triangle ABC où le point C est mobile. Le rayon $[OC]$ détermine deux triangles OAC et OBC . Si α désigne l'angle au centre \widehat{AOC} , quelle est l'affirmation vraie parmi les suivantes ?



- (A) Le triangle OAC a toujours une aire strictement supérieure à celle du triangle OBC .
 (B) Le triangle OAC a toujours une aire strictement inférieure à celle du triangle OBC .
 (C) Le triangle OAC a une aire strictement supérieure à celle du triangle OBC si et seulement si $\alpha < 90^\circ$.
 (D) Le triangle OAC a une aire strictement inférieure à celle du triangle OBC si et seulement si $\alpha < 90^\circ$.
 (E) Les deux triangles ont toujours la même aire.

12. Dans la figure ci-dessous, si $RPCQ$ est un parallélogramme, quelle est la longueur $|AQ|$?



- (A) 3,6 (B) 6 (C) 8 (D) 8,4 (E) 12

13. *Sans réponse préformulée* — Comme travailleur de l'entreprise, j'ai pu acheter un téléphone « intelligent » au prix d'usine c'est-à-dire à la moitié de ce qu'il est vendu en magasin. Comme je n'en ai pas l'usage, je l'ai revendu 40 % plus cher que ce que je l'avais payé. Celui qui me l'a racheté a cependant encore fait une économie de p % par rapport à ce qu'il aurait dû payer en magasin. Que vaut p ?

14. Le triangle ABC est isocèle de base $[AC]$. Les points P et Q sur $[BC]$ et $[BA]$ respectivement sont tels que $|AC| = |AP| = |PQ| = |QB|$. Que mesure, en degrés, l'angle \widehat{B} ?

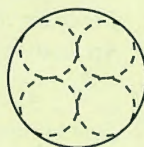
(A) $\frac{180}{7}$ (B) $\frac{181}{7}$ (C) 26 (D) 28 (E) 30

15. Soit $N = \overline{93xyz}$ où x, y et z sont des chiffres. Quelle est la plus grande valeur de $x+y+z$ pour laquelle N est divisible par 6? (La notation $\overline{abc\dots d}$ représente le nombre dont l'écriture décimale est constituée, de gauche à droite, des chiffres a, b, c, \dots et d .)

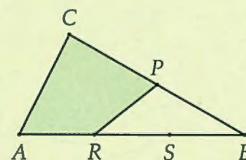
(A) 18 (B) 20 (C) 24 (D) 26 (E) 27

16. Quel est le rayon du cercle tangent extérieurement à quatre cercles de même rayon r tangents l'un à l'autre comme sur la figure ci-contre?

(A) $\frac{5}{2}r$ (D) $2\sqrt{2}r$
 (B) $(\sqrt{2}+1)r$ (E) $(4-\sqrt{2})r$
 (C) $\sqrt{5}r$



17. Sans réponse préformulée — Sur la figure de droite, le point P est le milieu de $[BC]$, tandis que les points R et S partagent le côté $[AB]$ en trois parties égales. Si l'aire du triangle ABC vaut 621 cm^2 , que mesure (en centimètres carrés) l'aire du quadrilatère $ARPC$?

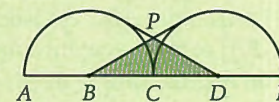


18. Un cube dont les arêtes mesurent 8 cm a été coupé par un plan. La section est un hexagone régulier. L'une des parties est le polyèdre ci-contre. Quelle est, en centimètres, la longueur totale des arêtes de ce polyèdre?



(A) $24(2+\sqrt{2})$ (D) 24
 (B) $24(2+\sqrt{3})$ (E) $24\sqrt{2}$
 (C) $24(3+\sqrt{2})$

19. Les demi-cercles de centres B et D et de rayon 3 sont tangents en C . La tangente au demi-cercle de diamètre $[AC]$ issue de D coupe en P la tangente au demi-cercle de diamètre $[CE]$ issue de B . Que vaut l'aire du triangle BDP ?



(A) $3\sqrt{3}$ (B) 5 (C) $\frac{6\sqrt{3}-3}{2}$ (D) $\frac{9}{2}$ (E) 6

20. Sans réponse préformulée — Une pyramide régulière a une base carrée de côté 2 et une hauteur de $\sqrt{2}$. Que vaut la somme des longueurs de toutes ses arêtes?

21. Sans réponse préformulée — Je fais l'aller de mon parcours d'entraînement en courant à la vitesse constante de 10 km/h, puis le retour en marchant à 6 km/h. J'ai mis 80 minutes pour l'ensemble. En kilomètres, quelle distance totale ai-je parcourue?

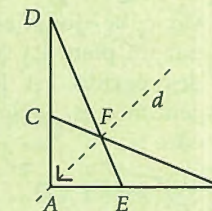
22. Un « hand spinner » (le trait gras sur la figure ci-dessous) est formé à partir de 6 cercles de même rayon r tangents entre eux, et tangents à un 7^e cercle central de même rayon. Quel est le périmètre de cet « hand spinner »?



(A) $3\pi r$ (B) $6\pi r$ (C) $8\pi r$ (D) $6\pi r^2$ (E) $8\pi r^2$

23. Sans réponse préformulée — Si $a+b=5$ et $a^2+b^2=19$, que vaut a^3+b^3 ?

24. Le triangle ABC est rectangle en A avec $|AB|=12$ et $|AC|=5$. La droite d est la bissectrice de l'angle \widehat{A} . Le triangle ADE est l'image de ABC par la symétrie orthogonale d'axe d . Les côtés BC et DE se coupent en F . Que vaut l'aire du quadrilatère non convexe $ABFD$?



(A) 48 (B) $\frac{119}{5}$ (C) $\frac{480}{13}$ (D) $\frac{720}{17}$ (E) $\frac{780}{17}$

25. *Sans réponse préformulée* — Combien y a-t-il de nombres entiers naturels de quatre chiffres (le premier des quatre chiffres est donc non nul) dont le produit des chiffres des unités et des dizaines est égal au nombre formé par les deux premiers chiffres ? (Par exemple : 1535, car $15 = 3 \times 5$.)
26. Dans un triangle ABC , la médiane issue de A est perpendiculaire à la médiane issue de B . Si $|BC| = 8$ et $|AC| = 6$, que vaut $|AB|$?
- (A) $3\sqrt{2}$ (B) $2\sqrt{5}$ (C) $\frac{9}{2}$ (D) $\frac{11}{\sqrt{5}}$ (E) 5
27. *Sans réponse préformulée* — Si $11! = \overline{3x91y800}$, que vaut \overline{xy} ? (Pour tout naturel n , $n! = n \times (n-1) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$.)
28. *Sans réponse préformulée* — Considérons le polyèdre convexe dont les six sommets sont parmi les sommets d'un cube, les deux sommets ignorés du cube étant opposés. Combien de faces possède ce solide ?
29. *Sans réponse préformulée* — Au début, j'ai un tas de 2019 jetons. Je répète le processus suivant : si un tas contient un nombre pair de jetons, je le partage en deux tas égaux ; si un tas contient un nombre impair > 1 de jetons, je détruis un jeton et partage le reste en deux tas égaux. Combien de jetons auront été détruits lorsque tous les tas restants seront réduits à un seul jeton ?
30. *Sans réponse préformulée* — Un nombre *autodescriptif* est un nombre dont le premier chiffre en partant de la gauche indique le nombre de chiffres 0 qui le composent ; le deuxième chiffre indique le nombre de chiffres 1 qui le composent ; le troisième indique le nombre de chiffres 2 qui le composent et ainsi de suite jusqu'au dernier chiffre. Ainsi 1210 est un nombre autodescriptif car il contient un chiffre 0, deux chiffres 1, un chiffre 2 et zéro chiffre 3. Que vaut la somme des chiffres d'un nombre autodescriptif à 10 chiffres ?

Les participants sélectionnés pour la finale recevront par l'intermédiaire de leur école une fiche qu'ils devront compléter. Le jour de la finale, ils se muniront de cette fiche ainsi que de leur carte d'identité.