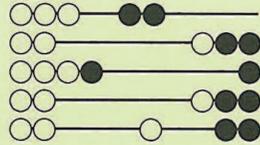




**OLYMPIADE
MATHÉMATIQUE BELGE**



Quarante-septième Olympiade Mathématique Belge
Organisée par la Société Belge des Professeurs de Mathématique
Midi demi-finale 2022

INSTRUCTIONS

- N'ouvrez pas ce livret avant le signal de votre professeur.
- Vous indiquerez vos réponses au verso de cette page.
- Ce questionnaire contient 30 questions ; répondez à 5 questions au moins.
- Quinze questions sont à choix multiple. Chacune est suivie de réponses désignées par (A), (B), (C), (D) et (E). Chaque question possède une seule réponse correcte. Décidez quelle est la réponse correcte parmi les cinq proposées et retenez la lettre majuscule correspondante. Sur la feuille réponse, écrivez cette lettre dans le cercle situé à droite du numéro de la question.
EXEMPLE : si vous estimez que la réponse correcte à la question numéro 17 est celle précédée de la lettre (D), vous écrirez D sur la feuille réponse, à droite du numéro 17, dans le cercle.
- Quinze questions sont sans réponses préformulées. Dans ce cas, la réponse correcte est un nombre entier dans [0;999]. C'est ce nombre que vous écrirez dans la case rectangulaire de la feuille réponse.
- RÈGLES DE COTATION :** Vous recevez 5 points par réponse correcte, 2 points par abstention et 0 point par réponse fausse. Avec ce système, deviner fera en moyenne diminuer votre score. Vous n'avez intérêt à deviner que si vous avez au moins une chance sur deux de bien choisir.
- Reportez les réponses au fur et à mesure que vous les obtenez. Écrivez au crayon (si vous changez d'avis, gomez la réponse). Du papier de brouillon, du papier millimétré, une règle, un compas, une gomme peuvent être utilisés. Les calculatrices et règles à calcul ne sont pas autorisées, de même que les livres et les notes personnelles.
- Au signal de votre professeur, détachez la feuille de couverture sans déchirer le questionnaire, retournez-la, couvrez-en les questions, puis inscrivez les informations demandées.
- Quand votre professeur vous l'indiquera, commencez le travail sur les problèmes. Vous disposez de 90 minutes.

Mercredi 16 mars 2022

À REMPLIR PAR L'ÉLÈVE (en majuscules)

Nom :

Prénom :

Classe :

Adresse privée

Rue et n° :

Code postal et localité :

École

Nom (sans abréviations) :

Adresse

Rue et n° :

Code postal et localité :

CADRE RÉSERVÉ AU PROFESSEUR

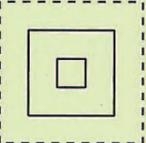
Chaque réponse correcte a une valeur de 5 points et chaque abstention a une valeur de 2 points ; rien n'est déduit pour une réponse fausse. Le score total est calculé en prenant 5 fois le nombre de réponses correctes et en ajoutant 2 fois le nombre d'abstentions.

Réponses correctes : × 5 =
+

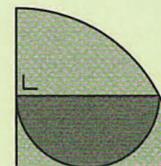
Abstentions : × 2 =

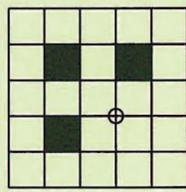
Score total :

1	<input type="radio"/>
2	<input type="radio"/>
3	<input type="text"/>
4	<input type="text"/>
5	<input type="radio"/>
6	<input type="text"/>
7	<input type="radio"/>
8	<input type="text"/>
9	<input type="radio"/>
10	<input type="radio"/>
11	<input type="radio"/>
12	<input type="radio"/>
13	<input type="text"/>
14	<input type="text"/>
15	<input type="text"/>
16	<input type="text"/>
17	<input type="radio"/>
18	<input type="text"/>
19	<input type="radio"/>
20	<input type="text"/>
21	<input type="radio"/>
22	<input type="text"/>
23	<input type="radio"/>
24	<input type="radio"/>
25	<input type="radio"/>
26	<input type="text"/>
27	<input type="radio"/>
28	<input type="text"/>
29	<input type="text"/>
30	<input type="text"/>

1. $(2^{-1} - 2^{-2})^{-3} =$
 (A) 64 (B) -64 (C) $\frac{81}{64}$ (D) $\frac{64}{81}$ (E) $\frac{1}{64}$
2. Que faut-il ajouter à 2020^2 pour obtenir 2022^2 ?
 (A) 8084 (B) 2020^2 (C) 440 (D) 2020 (E) 22^2
3. *Sans réponse préformulée* — Si j'ajoute 3 au numérateur d'une fraction, elle double; si j'ajoute 4 au dénominateur de la même fraction, elle est divisée par 2. Quelle est la somme du numérateur et du dénominateur de cette fraction?
4. *Sans réponse préformulée* — Maude a acheté de la nourriture pour alimenter ses 14 poules durant 16 jours. Si elle possédait 6 poules de moins, combien de jours cette nourriture durerait-elle?
5. Que vaut $\frac{a}{a-b} + \frac{b}{b-a} + \frac{a-b}{a} + \frac{b-a}{b}$ si $a \neq 0$ et $a+b=0$?
 (A) 0 (B) 1 (C) 5 (D) $2a^2$ (E) $\frac{a}{b} - \frac{b}{a}$
6. *Sans réponse préformulée* — Un carré est formé de quatre rectangles de 7 sur 3 et d'un petit carré central. Quelle est l'aire de ce dernier?
7. Si $-7 < -3x + 2 < 5$, alors $3x + 2$ est strictement compris entre :
 (A) -5 et 7; (B) -3 et 9; (C) -1 et 11;
 (D) -9 et 3; (E) -6 et 6.
8. *Sans réponse préformulée* — Autour d'un carré de côté 1, Mathilde ajoute successivement des couronnes carrées de largeur 1 pour former des carrés de plus en plus grands, comme sur la figure ci-contre. Combien de couronnes carrées doit-elle ajouter au carré initial pour former un carré dont le périmètre est 444?
- 
9. Parmi les nombres suivants, lequel possède le plus de diviseurs impairs?
 (A) 48 (B) 64 (C) 70 (D) 90 (E) 168

10. Si tous les Martiens ont la peau verte et qu'il existe un être à la peau verte qui chante juste, alors :
 (A) Il existe un Martien qui chante juste;
 (B) Il existe un Martien qui ne chante pas juste;
 (C) Tous les Martiens chantent juste;
 (D) Aucun Martien ne chante juste.
 (E) Aucune des conclusions précédentes ne découle des hypothèses.
11. Quel est le rapport de l'aire du quart de disque à celle du demi-disque sur la figure ci-dessous?



- (A) π (B) 3 (C) $\frac{5}{2}$ (D) $\sqrt{5}$ (E) 2
12. Le sol d'une cave, représenté ci-contre, est pavé de carreaux de forme carrée, excepté aux trois endroits indiqués en noir, où une colonne carrée s'élève jusqu'au plafond. Le cercle indique la position d'une lampe. Quelle est l'aire de la surface au sol qui est éclairée par cette lampe (aire mesurée en nombre de carreaux)?
 (A) 7,5 (B) 13 (C) 14 (D) 14,5 (E) 17
- 
13. *Sans réponse préformulée* — Dans un magasin où tous les prix affichés sont des nombres entiers, un client peut utiliser un des 2 bons de réduction suivants :
 — coupon 1 : 15 % de réduction de la part du prix affiché supérieure à 100 €;
 — coupon 2 : 25 % de réduction de la part du prix affiché supérieure à 175 €. À partir de quel montant du prix affiché le coupon 2 est-il le plus avantageux?

14. *Sans réponse préformulée* — Un tour de circuit de 10 km a été effectué à la vitesse moyenne de 100 km/h. Les 5 premiers kilomètres ont été parcourus avec une vitesse de 150 km/h. À quelle vitesse, en kilomètres par heure, ont été effectués les 5 derniers kilomètres ?

15. *Sans réponse préformulée* — L'aire d'une face d'un cube vaut 27. Quel est le diamètre de la sphère circonscrite au cube (c'est-à-dire la sphère passant par ses huit sommets) ?

16. *Sans réponse préformulée* — Combien de multiples de 12 sont des produits de deux nombres distincts de l'ensemble $\{1, 3, 6, 12, 15, 16, 20\}$?

17. Une école comporte quatre classes, chacune de 20 élèves. Pour tout choix d'un élève par classe, il y a au moins deux filles parmi les quatre élèves choisis. Le nombre maximal de garçons dans cette école est :

- (A) 22 (B) 40 (C) 41 (D) 61 (E) Un autre nombre

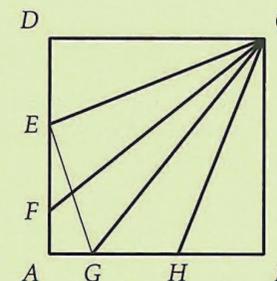
18. *Sans réponse préformulée* — Quel est le reste de la division de 434 721 566 336 par 7 ?

19. Dans le demi-cercle de diamètre $[AB]$ est inscrit un carré $IJKL$, avec les sommets I et J sur le segment $[AB]$. Que vaut le rapport de l'aire du carré à l'aire du demi-disque ?

- (A) $\frac{8}{\pi}$ (B) $\frac{8}{5\pi}$ (C) $\frac{\sqrt{2}}{\pi}$ (D) $\frac{2\sqrt{5}}{3\pi}$ (E) $\frac{3}{2\pi}$

20. *Sans réponse préformulée* — Pour combien de nombres naturels n tels que $1 \leq n \leq 20$ le quotient de 27 par n n'admet-il pas d'écriture décimale limitée ?

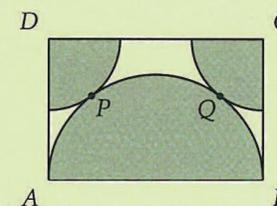
21. Les segments $[CE]$, $[CF]$, $[CG]$ et $[CH]$ partagent le carré $ABCD$ en cinq parties de même aire, comme sur la figure ci-dessous. Que vaut le rapport des longueurs $\frac{|EG|}{|CF|}$?



- (A) $\sqrt{\frac{10}{41}}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{5\sqrt{2}}{7}$ (D) $\frac{\sqrt{10}}{7}$ (E) $\frac{\sqrt{34}}{12}$

22. *Sans réponse préformulée* — La somme d'un nombre de trois chiffres non nuls et du nombre obtenu en renversant l'ordre de ses chiffres vaut 988. Quelle est la valeur maximale de leur différence ?

23. Sur la figure ci-dessous, $ABCD$ est un rectangle tel que $|AB| = 3$ et $|BC| = 2$. Le demi-cercle de diamètre $[AB]$ est tangent aux quarts de cercles de centres C et D en Q et P respectivement. Que vaut l'aire de la surface ombrée ?



- (A) $\frac{5}{3}\pi$ (B) $\frac{13}{8}\pi$ (C) $\sqrt{13}\pi$ (D) $\frac{8}{5}\pi$ (E) $\frac{20}{13}\pi$

24. Pierre marche à une vitesse de 5 km/h pendant 48 minutes. S'il continuait à cette vitesse, il arriverait avec un retard de 48 minutes à son rendez-vous. Au lieu de cela, il commence ensuite à courir à la vitesse de 13 km/h et arrive avec une avance de 48 minutes. Quelle est la distance totale que Pierre a parcourue ?
- (A) 16 km (B) 16,5 km (C) 17 km (D) 17,3 km (E) 17,6 km
25. Deux demi-droites de même origine font un angle de 60° . Elles sont tangentes à un cercle de rayon 1 en T et T' . Quelle est l'aire de la surface délimitée par ces deux demi-droites et le petit arc $\widehat{TT'}$?
- (A) $\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$ (B) $2\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$ (C) $\sqrt{3} - \frac{\pi}{6}$ (D) $2\sqrt{3} - \frac{\pi}{6}$ (E) $\sqrt{3}$
26. *Sans réponse préformulée* — Un groupe d'élèves ont effectué la division euclidienne de 2022 par un nombre naturel. Chacun a choisi un diviseur différent, mais, curieusement, tous ont obtenu un quotient égal à 18. De combien d'élèves au maximum se compose ce groupe ?
27. Un nombre *palindrome* est un nombre qui a la même valeur quel que soit le sens de lecture, par exemple 538 835. Quelle est la somme de tous les nombres palindromes à trois chiffres ?
- (A) 4995 (B) 44 955 (C) 49 500 (D) 49 950
(E) Une autre réponse
28. *Sans réponse préformulée* — Le triangle ABC est isocèle et obtusangle, de sommet principal A . Extérieurement à ce triangle, sur $[AB]$, est construit un triangle isocèle ABD de sommet principal D tel que A , C et D soient alignés. Quelle doit être la mesure de l'angle \widehat{BAC} en degrés pour que BD soit perpendiculaire à BC ?
29. *Sans réponse préformulée* — Combien existe-t-il de couples $(a; b)$ d'entiers tels que $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{2}$?
30. *Sans réponse préformulée* — Un ruban de papier collant long de 24 m est enroulé autour d'un noyau cylindrique de 40 mm de diamètre. Le rouleau a un diamètre total de 80 mm. Lorsque son diamètre total se sera réduit à 60 mm, quelle longueur de papier collant, arrondie en mètres, restera-t-il ?

Les participants sélectionnés pour la finale recevront par l'intermédiaire de leur école une fiche qu'ils devront compléter. Le jour de la finale, ils se muniront de cette fiche ainsi que de leur carte d'identité.