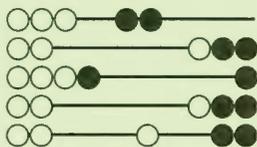




**OLYMPIADE  
MATHÉMATIQUE BELGE**



## Quarante-huitième Olympiade Mathématique Belge

*Organisée par la Société Belge des Professeurs de Mathématique*

### Midi demi-finale 2023

#### INSTRUCTIONS

- N'ouvrez pas ce livret avant le signal de votre professeur.
- Vous indiquerez vos réponses au verso de cette page.
- Ce questionnaire contient 30 questions ; répondez à 5 questions au moins.
- Quinze questions sont à choix multiple. Chacune est suivie de réponses désignées par **(A)**, **(B)**, **(C)**, **(D)** et **(E)**. Chaque question possède une seule réponse correcte. Décidez quelle est la réponse correcte parmi les cinq proposées et retenez la lettre majuscule correspondante. Sur la feuille réponse, écrivez cette lettre dans le cercle situé à droite du numéro de la question.  
EXEMPLE : si vous estimez que la réponse correcte à la question numéro 17 est celle précédée de la lettre **(D)**, vous écrirez D sur la feuille réponse, à droite du numéro 17, dans le cercle.
- Quinze questions sont sans réponses préformulées. Dans ce cas, la réponse correcte est un nombre entier dans  $[0;999]$ . C'est ce nombre que vous écrirez dans la case rectangulaire de la feuille réponse.
- RÈGLES DE COTATION** : Vous recevez 5 points par réponse correcte, 2 points par abstention et 0 point par réponse fausse. Avec ce système, deviner fera en moyenne diminuer votre score. Vous n'avez intérêt à deviner que si vous avez au moins une chance sur deux de bien choisir.
- Reportez les réponses au fur et à mesure que vous les obtenez. Écrivez au crayon (si vous changez d'avis, gomez la réponse). Du papier de brouillon, du papier millimétré, une règle, un compas, une gomme peuvent être utilisés. Les calculatrices et règles à calcul ne sont pas autorisées, de même que les livres et les notes personnelles.
- Au signal de votre professeur, détachez la feuille de couverture sans déchirer le questionnaire, retournez-la, couvrez-en les questions, puis inscrivez les informations demandées.
- Quand votre professeur vous l'indiquera, commencez le travail sur les problèmes. Vous disposez de 90 minutes.

**Mercredi 8 mars 2023**

#### À REMPLIR PAR L'ÉLÈVE (en majuscules)

Nom :

Prénom :

Classe :

Adresse privée

Rue et n° :

Code postal et localité :

École

Nom (sans abréviations) :

Adresse

Rue et n° :

Code postal et localité :

#### CADRE RÉSERVÉ AU PROFESSEUR

Chaque réponse correcte a une valeur de 5 points et chaque abstention a une valeur de 2 points ; rien n'est déduit pour une réponse fausse. Le score total est calculé en prenant 5 fois le nombre de réponses correctes et en ajoutant 2 fois le nombre d'abstentions.

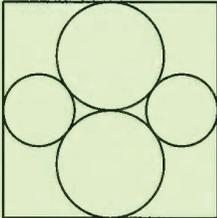
Réponses correctes :  × 5 =

Abstentions :  × 2 =

Score total :

|    |                       |
|----|-----------------------|
| 1  | <input type="text"/>  |
| 2  | <input type="radio"/> |
| 3  | <input type="radio"/> |
| 4  | <input type="radio"/> |
| 5  | <input type="text"/>  |
| 6  | <input type="text"/>  |
| 7  | <input type="text"/>  |
| 8  | <input type="text"/>  |
| 9  | <input type="text"/>  |
| 10 | <input type="text"/>  |
| 11 | <input type="text"/>  |
| 12 | <input type="radio"/> |
| 13 | <input type="radio"/> |
| 14 | <input type="radio"/> |
| 15 | <input type="radio"/> |
| 16 | <input type="text"/>  |
| 17 | <input type="radio"/> |
| 18 | <input type="radio"/> |
| 19 | <input type="text"/>  |
| 20 | <input type="radio"/> |
| 21 | <input type="text"/>  |
| 22 | <input type="text"/>  |
| 23 | <input type="radio"/> |
| 24 | <input type="radio"/> |
| 25 | <input type="text"/>  |
| 26 | <input type="text"/>  |
| 27 | <input type="radio"/> |
| 28 | <input type="text"/>  |
| 29 | <input type="radio"/> |
| 30 | <input type="radio"/> |

1. *Sans réponse préformulée* — Que vaut  $\frac{2^{16}}{16^2}$  ?
2. Quel est le plus petit nombre naturel non nul, carré parfait et divisible par 2, par 5 et par 7 ?  
 (A) 70 (B) 100 (C) 196 (D) 1225 (E) 4900
3. Quel est l'encadrement le plus précis du produit des nombres réels  $x$  et  $y$  qui se déduit de  $0 \leq x < 1$  et  $1 < y \leq 2$  ?  
 (A)  $0 < xy < 2$  (B)  $0 \leq xy < 2$  (C)  $0 < xy \leq 2$  (D)  $0 \leq xy \leq 2$   
 (E) Aucun des précédents
4. Parmi les nombres suivants, lequel est le plus grand ?  
 (A)  $\frac{2025 + 2026}{2023 + 2024}$  (D)  $\frac{2023 + 2025}{2024 + 2026}$   
 (B)  $\frac{2024 + 2026}{2023 + 2025}$  (E)  $\frac{2023 + 2024}{2025 + 2026}$   
 (C)  $\frac{2024 + 2025}{2023 + 2026}$
5. *Sans réponse préformulée* — Combien de nombres naturels impairs divisent 230 ?
6. *Sans réponse préformulée* — Au début d'un match de football, les deux équipes de 11 joueuses sont alignées de part et d'autre des 4 arbitres. À la fin des hymnes nationaux, toutes les joueuses de l'équipe A passent devant les arbitres et devant toutes les joueuses de l'équipe B pour leur taper dans la main. Ensuite, les joueuses de l'équipe B tapent dans la main des arbitres. Combien y a-t-il de tapes dans les mains ?
7. *Sans réponse préformulée* — Pour impressionner les Gaulois, César fait défiler deux groupes de légionnaires. Chaque groupe est disposé en carré parfait. Le plus grand carré a 7 rangées de plus que l'autre. Les effectifs des deux groupes diffèrent de 217 légionnaires. Combien de légionnaires compte ce défilé ?
8. *Sans réponse préformulée* — Quelle est la somme de tous les chiffres utilisés pour écrire tous les nombres de 1 à 100 inclus ?

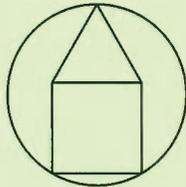
9. *Sans réponse préformulée* — Les longueurs des côtés d'un triangle rectangle sont des nombres entiers  $x$ ,  $x + 7$  et  $2x + 3$ . Que vaut  $x$  ?
10. *Sans réponse préformulée* — Soit  $S = 2023 + 2022 - 2021 - 2020 + 2019 + 2018 - 2017 - 2016 + \dots + 3 + 2 - 1$ . Que vaut la somme des chiffres du nombre  $S$  ?
11. *Sans réponse préformulée* — Si  $a, b, c, d$  sont des nombres entiers positifs tels que  $a < 2b$ ,  $b < 3c$ ,  $c < 4d$  et  $d < 40$ , quelle est la plus grande valeur possible pour  $a$  ?
12. Si  $n$  est un nombre naturel dont l'écriture comporte  $k$  chiffres, l'écriture de  $n^2$  requiert  
 (A)  $2k - 2$  chiffres ;  
 (B)  $2k - 1$  chiffres ;  
 (C)  $2k$  chiffres ;  
 (D)  $2k - 2$  ou  $2k - 1$  chiffres selon le cas ;  
 (E)  $2k - 1$  ou  $2k$  chiffres selon le cas.
13. Les graphes des deux fonctions  $x \mapsto ax + b$  et  $x \mapsto cx + d$  n'ont aucun point commun si et seulement si  
 (A)  $a = c$  (D)  $a \neq c$  et  $b = d$   
 (B)  $a \neq c$  (E)  $b \neq d$   
 (C)  $a = c$  et  $b \neq d$
14. Sur la figure ci-contre, les 4 cercles sont tangents entre eux et tangents aux côtés du carré de côté 12. Quel est le rayon des petits cercles ?  
 (A)  $\frac{5}{2}$  (B)  $\sqrt{5}$  (C) 2 (D)  $\sqrt{3}$   
 (E)  $\frac{1 + \sqrt{5}}{3} \pi$
- 
15. Si  $q > 5$ , laquelle des expressions suivantes donne la plus petite valeur ?  
 (A)  $\frac{q+1}{5}$  (B)  $\frac{q}{5}$  (C)  $\frac{5}{q-1}$  (D)  $\frac{5}{q+1}$  (E)  $\frac{5}{q}$

16. *Sans réponse préformulée* — Que vaut la somme des trois nombres naturels dont les produits deux à deux valent 75, 126 et 1050?

17. Dans un carré de  $n$  cm de côté, où  $n$  est un nombre naturel, une artisanne dessine un croisillon en traçant les diagonales et les parallèles à ces diagonales coupant les côtés tous les centimètres. Quelle est la longueur totale de tous les segments ainsi tracés (hors côtés du carré)?

- (A)  $2n^2\sqrt{2}$  (B)  $n^2\sqrt{2}$  (C)  $2n^2$  (D)  $n^2$  (E)  $2n(n+1)\sqrt{2}$

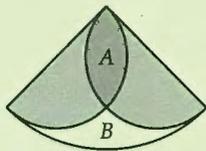
18. Un carré de 5 cm de côté est surmonté d'un triangle équilatéral, comme sur la figure ci-dessous. Quel est, en centimètres, le rayon du cercle circonscrit à l'ensemble?



- (A)  $3\sqrt{3}$  (B)  $2\sqrt{3}+1$  (C)  $3\sqrt{2}$  (D)  $3\sqrt{2}+1$  (E) 5

19. *Sans réponse préformulée* — Combien de chiffres distincts apparaissent comme chiffres des dizaines des nombres  $6^k$  avec  $k$  naturel plus grand ou égal à 2?

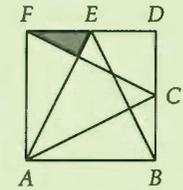
20. La figure ci-contre est formée par deux demi-disques et un quart de disque. Le diamètre de chaque demi-disque est un rayon du quart de disque. Parmi les 4 zones qui la composent, A est la plus foncée et B est en blanc. Que vaut le rapport des aires de A et B?



- (A) 1 (B)  $3/\pi$  (C)  $\pi/3$  (D)  $\pi/4$   
 (E) La réponse dépend du rayon du quart de disque.

21. *Sans réponse préformulée* — Un carré est partagé en quatre rectangles. Les dimensions en centimètres de trois de ceux-ci sont  $4 \times 6$ ,  $5 \times 9$  et  $2 \times 11$ . Quelle est, en centimètres carrés, l'aire du quatrième rectangle?

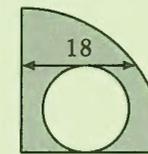
22. *Sans réponse préformulée* — Les points C et E sont les milieux de deux côtés du carré ABDF, de côté 120, représenté sur la figure ci-contre. Les segments [AE], [BE], [AC] et [FC] partagent le carré en huit régions; quelle est l'aire de celle qui est ombrée?



23. Si  $n$  est un nombre entier positif non nul, désignons par  $S_n$  la somme des 10 premiers multiples non nuls de  $n$ . Combien vaut  $S_1 + S_2 + \dots + S_{10}$ ?

- (A) 45 (B) 55 (C) 66 (D) 2025 (E) 3025

24. Que vaut l'aire de la zone ombrée dans la figure ci-dessous?

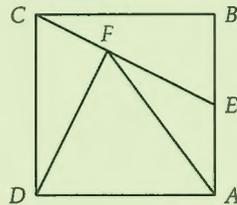


- (A)  $32\pi$  (B) 162 (C)  $324\pi$  (D)  $162\pi$  (E)  $81\pi$

25. *Sans réponse préformulée* — Al Jèbre, Pauline Ohm et Barry Centre courent toujours à des vitesses parfaitement constantes, mais différentes entre elles. S'ils s'affrontent sur 1000 m, Al gagne avec 60 m d'avance sur Pauline et avec 107 m d'avance sur Barry. Combien de mètres d'avance Pauline doit-elle donner à Barry pour franchir avec lui l'arrivée d'une course de 1000 m?

26. *Sans réponse préformulée* — Un cercle est tangent aux quatre côtés d'un trapèze isocèle de bases 12 et 27. Quelle est la hauteur de ce trapèze?

27. Un carré  $ABCD$ , représenté ci-dessous, a un côté de 5 cm. Le point  $E$  est situé au milieu de  $[AB]$  et  $DF$  est perpendiculaire à  $CE$ . Quelle est, en centimètres, la longueur de  $[AF]$ ?



- (A)  $3\sqrt{3}$     (B)  $2\sqrt{3}+1$     (C)  $2\sqrt{5}$     (D)  $3\sqrt{2}+1$     (E) 5
28. *Sans réponse préformulée* — La division de 2023 par 11 et 12 donne respectivement les restes 10 et 7. Quel est le plus grand nombre inférieur à 1000 possédant cette même propriété?
29. Dans un triangle  $ABC$ , le point  $P$  sur  $[AB]$  est tel que  $|AP| = \frac{1}{4}|AB|$ . Le point  $Q$  sur  $[BC]$  est tel que  $[PQ]$  partage le triangle  $ABC$  en 2 figures de même aire. Que vaut  $\frac{|CQ|}{|CB|}$ ?
- (A)  $\frac{1}{4}$     (B)  $\frac{1}{3}$     (C)  $\frac{\sqrt{2}}{4}$     (D)  $\frac{2}{5}$     (E) Une autre réponse
30. Intérieurement à un dodécagone régulier  $ABCDEFGHIJKL$  de côté 1, on construit les carrés  $ABMN$ ,  $CDOP$ ,  $EFQR$ ,  $GHST$ ,  $IJUV$  et  $KLWX$ . Quelle est la longueur de  $[NO]$ ?
- (A)  $\sqrt{3}$     (B) 2    (C)  $\frac{3}{2}$     (D)  $\frac{3}{2}\sqrt{2}$     (E) Une autre réponse

Les participants sélectionnés pour la finale recevront par l'intermédiaire de leur école une fiche qu'ils devront compléter. Le jour de la finale, ils se muniront de cette fiche ainsi que de leur carte d'identité.