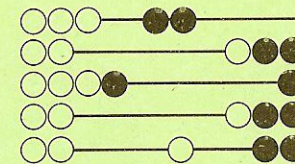


30. En pharmacie, il existe de l'alcool à différentes concentrations. Par exemple, l'alcool à 60° est composé de 60 % d'alcool pur et de 40 % d'eau. On réalise un mélange de $\frac{3}{5}$ de litre d'alcool à 90° et $\frac{1}{5}$ de litre d'alcool à 50°. Quelle est, en degrés, la concentration en alcool du mélange obtenu ?

- (A) 60 (B) 64 (C) 65 (D) 75 (E) 80



OLYMPIADE
MATHÉMATIQUE BELGE



Trente-quatrième Olympiade Mathématique Belge

organisée par la

*Société Belge des Professeurs de Mathématique
d'expression française*

Midi éliminatoire 2009

INSTRUCTIONS

1. N'ouvrez pas ce livret avant le signal de votre professeur.
2. Vous indiquerez vos réponses au verso de cette page.
3. Ce questionnaire contient 30 questions ; répondez à 5 questions au moins.
4. Vingt-six questions sont à choix multiple. Chacune est suivie de réponses désignées par (A), (B), (C), (D) et (E). Chaque question possède une seule réponse correcte. Décidez quelle est la réponse correcte parmi les cinq proposées et retenez la lettre majuscule correspondante. Sur la feuille réponse, écrivez cette lettre dans le cercle situé à droite du numéro de la question.
EXEMPLE : si vous estimez que la réponse correcte à la question numéro 17 est celle précédée de la lettre (D), vous écrirez D sur la feuille réponse, à droite du numéro 17, dans le cercle.
5. Quatre questions sont sans réponses préformulées. Dans ce cas, la réponse correcte est un nombre entier dans $[0; 999]$. C'est ce nombre que vous écrirez dans la case rectangulaire de la feuille réponse.
6. RÈGLES DE COTATION : Vous recevez 5 points par réponse correcte, 2 points par abstention et 0 point par réponse fausse. Avec ce système, deviner fera en moyenne diminuer votre score. Vous n'avez intérêt à deviner que si vous avez au moins une chance sur deux de bien choisir.
7. Reportez les réponses au fur et à mesure que vous les obtenez. Écrivez au crayon (si vous changez d'avis, gomez la réponse). Du papier de brouillon, du papier millimétré, une règle, un compas, une gomme peuvent être utilisés. Les calculatrices et règles à calcul ne sont pas autorisées, de même que les livres et les notes personnelles.
8. Au signal de votre professeur, détachez la feuille de couverture sans déchirer le questionnaire, retournez-la, couvrez-en les questions, puis inscrivez les informations demandées.
9. Quand votre professeur vous l'indiquera, commencez le travail sur les problèmes. Vous disposez de 90 minutes.

Mercredi 14 janvier 2009

À REMPLIR PAR L'ÉLÈVE (en majuscules)

Nom :

Prénom :

Classe :

Adresse privée

Rue et n° :

Code postal et localité :

École

Nom (sans abréviations) :

Adresse

Rue et n° :

Code postal et localité :

CADRE RÉSERVÉ AU PROFESSEUR

Chaque réponse correcte a une valeur de 5 points et chaque abstention a une valeur de 2 points ; rien n'est déduit pour une réponse fausse. Le score total est calculé en prenant 5 fois le nombre de réponses correctes et en ajoutant 2 fois le nombre d'abstentions.

Réponses correctes : × 5 =

+

Abstentions : × 2 =

Score total :

- 1
- 2
- 3
- 4
- 5
- 6
- 7
- 8
- 9
- 10
- 11
- 12
- 13
- 14
- 15
- 16
- 17
- 18
- 19
- 20
- 21
- 22
- 23
- 24
- 25
- 26
- 27
- 28
- 29
- 30

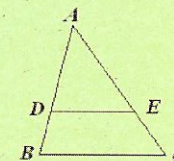
25. Si $a = 2^7 \cdot 6^3$, $b = 4^7 \cdot 3^3$, $c = 12^{10}$, $d = 3^7 \cdot 4^3$ et $e = 6^7 \cdot 2^3$, alors

- (A) $a = b = c = d = e$ (D) $d < a < e < b < c$
 (B) $a < d < e < b < c$ (E) $a < d < b < e < c$
 (C) $a < b < c < d < e$

26. On appelle nombre *oblong* un nombre qui est la somme d'un nombre naturel et de son carré (par exemple, $4 + 4^2 = 20$ est un nombre oblong). Parmi les nombres suivants, un seul est oblong, lequel ?

- (A) 196 (B) 300 (C) 512 (D) 600 (E) 2009

27. Dans la figure ci-contre, l'aire du triangle ADE vaut la moitié de celle du triangle ABC , la longueur de $[BC]$ est 2 et DE est parallèle à BC . Quelle est la longueur de $[DE]$?

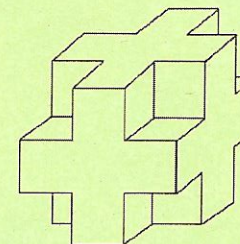


- (A) $\sqrt{2}$ (B) 1 (C) $\frac{3}{2}$ (D) $\sqrt{\frac{3}{2}}$
 (E) $\sqrt{3}$

28. Mon tiroir contient 8 chaussettes rouges et 2 chaussettes jaunes. Je retire une chaussette au hasard et c'est une jaune. Je retire à nouveau une chaussette au hasard, combien de chances ai-je d'obtenir la paire jaune complète ?

- (A) Une chance sur 4. (D) Une chance sur 9.
 (B) Une chance sur 5. (E) Une chance sur 10.
 (C) Une chance sur 8.

29. Sans réponse préformulée — En chacun des sommets d'un cube, on a enlevé un petit cube de manière à obtenir le solide que voici :

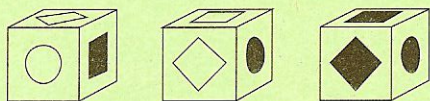


Quel est le nombre total d'arêtes de ce solide ?

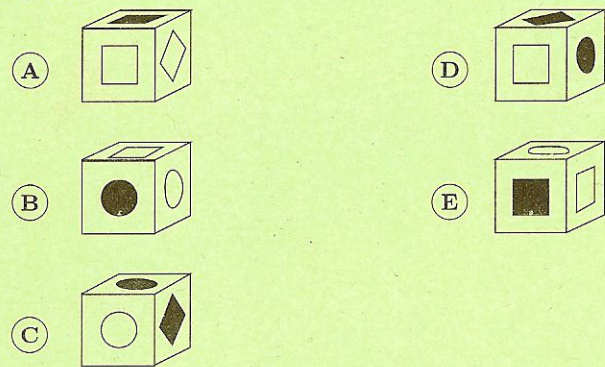
19. Dans un triangle rectangle, l'hypoténuse est de longueur h et un côté de l'angle droit est de longueur c . Sachant que la différence entre h et c vaut 1, quelle est la longueur de l'autre côté de l'angle droit ?

- (A) $h - c$ (D) $\sqrt{h^2 + c^2}$
 (B) $\sqrt{h - c}$ (E) $\frac{1}{h} + \frac{1}{c}$
 (C) $\sqrt{h + c}$

20. Paul a collé des étiquettes sur un dé à six faces. Voici trois vues de ce dé.

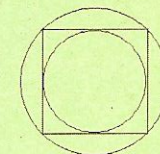


Parmi les cinq vues suivantes, laquelle représente également le dé de Paul ?

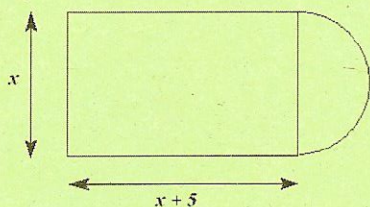


21. Le nombre de diviseurs entiers positifs de 2009 est
 (A) 0 (B) 2 (C) 4 (D) 6 (E) 12
22. Les nombres entiers a, b, c sont tels que $(a-2009)(b-2009)(c-2009) = 1$. Quelle est la plus petite valeur que peut prendre l'expression $a + b + c$?
 (A) 1 (B) 6024 (C) 6026 (D) 6028 (E) 6030
23. *Sans réponse préformulée* — Les quatre chiffres du nombre n sont tous différents. La somme des deux premiers chiffres est égale à la somme des deux derniers. Le premier chiffre vaut quatre fois le dernier et le deuxième vaut le tiers du troisième. Qué vaut la somme des chiffres de n ?
24. Le polynôme p est tel que $p(x) = ax^5 + bx^3 + cx + 1$ et $p(-2009) = -41$. Que vaut $p(2009)$?
 (A) 43 (B) 42 (C) 41 (D) 40 (E) -40

1. Que vaut le triple de l'opposé de la moitié de l'inverse d'un quart ?
 (A) -24 (B) -6 (C) $\frac{1}{2}$ (D) $-\frac{3}{2}$ (E) 6
2. Si $\frac{a+2b}{a-5b} = \frac{7}{3}$, alors $\frac{a}{b} =$
 (A) $-\frac{41}{4}$ (B) $-\frac{4}{41}$ (C) $\frac{4}{41}$ (D) $\frac{41}{4}$ (E) 37
3. Quel nombre, parmi les suivants, est naturel ?
 (A) 10π (D) $\frac{7\pi + 21}{3 + \pi}$
 (B) $\sqrt{2} + \sqrt{2}$ (E) $\frac{5\sqrt{18}}{\sqrt{3}}$
 (C) $-\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$
4. Si $2a^{2b} = 8$, que vaut $3a^{4b}$?
 (A) 12 (B) 24 (C) 36 (D) 42 (E) 48
5. *Sans réponse préformulée* — Une suite de huit chiffres 0 ou 1 est un *octet*, par exemple 01011100 et 00000111 sont des octets. Combien existe-t-il d'octets différents ?
6. Dans l'expression «mille milliards de mille sabords», le nombre de sabords est
 (A) 10^{13} (B) 10^{14} (C) 10^{15} (D) 10^{16} (E) 10^{17}
7. Dans la figure ci-contre, le carré est inscrit dans le grand cercle et circonscrit au petit cercle. L'aire du petit cercle vaut π . Que vaut l'aire du grand cercle ?
 (A) $\pi\sqrt{2}$ (B) 2π (C) 4π (D) $3,14\pi$
 (E) 6π
8. Dans un repère orthonormé du plan, les coordonnées des sommets P et Q d'un carré $PQRS$ sont respectivement $(0,0)$ et $(3,1)$, les points P, Q, R et S se succédant dans l'ordre antihorlogique. Quelles sont les coordonnées de S ?
 (A) $(1,3)$ (D) $(-1,2)$
 (B) $(-1,3)$ (E) $(3,-3)$
 (C) $(-3,3)$



9. La figure ci-dessous est formée d'un rectangle de dimensions x et $x + 5$ et d'un demi-cercle dont un diamètre est un petit côté du rectangle. Que vaut l'aire de cette figure ?



- (A) $2x + 5 + \pi \frac{x}{2}$ (D) $x^2 + 5 + \frac{\pi x^2}{8}$
 (B) $x^2 + 5 + \pi x^2$ (E) $x^2 + 5x + \frac{\pi x^2}{8}$
 (C) $x^2 + 5x + \frac{\pi x^2}{4}$

10. Le produit de cinq nombres entiers consécutifs n'est jamais

- (A) 120 (D) divisible par 3
 (B) 720 (E) divisible par 5
 (C) 3600

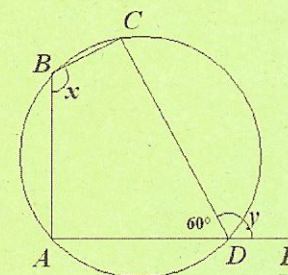
11. Dans une rue, André habite à côté de Bernard, Henri en face de Claude, Éric à côté de François, Daniel à côté d'André, François en face de Daniel et à côté de Henri, Gérard à côté d'Éric. Ces huit personnes habitent dans des maisons différentes. Tu peux en déduire que

- (A) Claude habite à côté de François ;
 (B) Henri habite en face d'André ;
 (C) Éric habite en face de Bernard ;
 (D) Claude habite à côté de Daniel ;
 (E) Gérard habite à côté d'Henri.

12. Quel est le chiffre des unités du nombre $2^{2009} \cdot 3^{2009} \cdot 6^{2009}$?

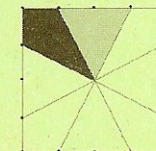
- (A) 0 (B) 2 (C) 4 (D) 6 (E) 8

13. Le quadrilatère $ABCD$ est inscrit dans un cercle et l'angle \widehat{ADC} mesure 60° . Quelle relation est vérifiée par les angles $x = \widehat{ABC}$ et $y = \widehat{CDE}$?



- (A) $x + y < 210^\circ$ (D) $x = 2y$
 (B) $x + y > 270^\circ$ (E) $x = y$
 (C) $x - y = 60^\circ$

14. Chaque côté du carré représenté ci-contre est partagé en quatre parties égales. L'aire du triangle gris vaut 12 cm^2 . En centimètres carrés, que vaut l'aire du quadrilatère noir ?



- (A) 8 (B) 10 (C) $\frac{45}{4}$ (D) 12 (E) $\frac{25}{2}$

15. *Sans réponse préformulée* — Combien existe-t-il de couples (x, y) de nombres entiers tels que $x^2 \leq 49$ et $0 < y^3 \leq 216$?

16. Les côtés d'un losange mesurent 13 cm et une de ses diagonales mesure 10 cm. Quelle est, en centimètres carrés, l'aire de ce losange ?

- (A) 60 (B) 65 (C) 120 (D) 130 (E) 156

17. Au marché, j'ai acheté un certain nombre de machins à 4 € pièce et un truc à 10 €. Le prix moyen de tous les articles que j'ai acquis est un nombre entier d'euros. Quel est le nombre maximum de machins que j'ai pu acheter ?

- (A) 0 (B) 2 (C) 5 (D) Une infinité
 (E) Il n'y a pas de maximum.

18. En pliant une feuille de papier en 4 dans le sens de la longueur et en 3 dans le sens de la largeur, on obtient un carré. Le périmètre de la feuille non pliée est de 294 cm. Que vaut, en centimètres, la largeur de la feuille ?

- (A) 21 (B) 63 (C) 84 (D) 98 (E) 126