



**OLYMPIADE
MATHÉMATIQUE BELGE**



Quarante-quatrième Olympiade Mathématique Belge
Organisée par la Société Belge des Professeurs de Mathématique
Midi éliminatoire 2019

INSTRUCTIONS

- N'ouvrez pas ce livret avant le signal de votre professeur.
- Vous indiquerez vos réponses au verso de cette page.
- Ce questionnaire contient 30 questions ; répondez à 5 questions au moins.
- Vingt-deux questions sont à choix multiple. Chacune est suivie de réponses désignées par (A), (B), (C), (D) et (E). Chaque question possède une seule réponse correcte. Décidez quelle est la réponse correcte parmi les cinq proposées et retenez la lettre majuscule correspondante. Sur la feuille réponse, écrivez cette lettre dans le cercle situé à droite du numéro de la question.
EXEMPLE : si vous estimez que la réponse correcte à la question numéro 17 est celle précédée de la lettre (D), vous écrirez D sur la feuille réponse, à droite du numéro 17, dans le cercle.
- Huit questions sont sans réponses préformulées. Dans ce cas, la réponse correcte est un nombre entier dans [0;999]. C'est ce nombre que vous écrirez dans la case rectangulaire de la feuille réponse.
- RÈGLES DE COTATION : Vous recevez 5 points par réponse correcte, 2 points par abstention et 0 point par réponse fausse. Avec ce système, deviner fera en moyenne diminuer votre score. Vous n'avez intérêt à deviner que si vous avez au moins une chance sur deux de bien choisir.
- Reportez les réponses au fur et à mesure que vous les obtenez. Écrivez au crayon (si vous changez d'avis, gomez la réponse). Du papier de brouillon, du papier millimétré, une règle, un compas, une gomme peuvent être utilisés. Les calculatrices et règles à calcul ne sont pas autorisées, de même que les livres et les notes personnelles.
- Au signal de votre professeur, détachez la feuille de couverture sans déchirer le questionnaire, retournez-la, couvrez-en les questions, puis inscrivez les informations demandées.
- Quand votre professeur vous l'indiquera, commencez le travail sur les problèmes. Vous disposez de 90 minutes.

Mercredi 16 janvier 2019

À REMPLIR PAR L'ÉLÈVE (en majuscules)

Nom :

Prénom :

Classe :

Adresse privée

Rue et n° :

Code postal et localité :

École

Nom (sans abréviations) :

Adresse

Rue et n° :

Code postal et localité :

CADRE RÉSERVÉ AU PROFESSEUR

Chaque réponse correcte a une valeur de 5 points et chaque abstention a une valeur de 2 points ; rien n'est déduit pour une réponse fausse. Le score total est calculé en prenant 5 fois le nombre de réponses correctes et en ajoutant 2 fois le nombre d'abstentions.

Réponses correctes : × 5 =

Abstentions : × 2 =

Score total :

1	<input type="radio"/>
2	<input type="text"/>
3	<input type="radio"/>
4	<input type="radio"/>
5	<input type="radio"/>
6	<input type="radio"/>
7	<input type="text"/>
8	<input type="text"/>
9	<input type="radio"/>
10	<input type="radio"/>
11	<input type="text"/>
12	<input type="text"/>
13	<input type="radio"/>
14	<input type="radio"/>
15	<input type="radio"/>
16	<input type="radio"/>
17	<input type="radio"/>
18	<input type="text"/>
19	<input type="text"/>
20	<input type="radio"/>
21	<input type="radio"/>
22	<input type="radio"/>
23	<input type="radio"/>
24	<input type="text"/>
25	<input type="radio"/>
26	<input type="radio"/>
27	<input type="radio"/>
28	<input type="radio"/>
29	<input type="radio"/>
30	<input type="radio"/>

1. Que vaut $64 \times \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4} - \frac{7}{8}\right)$?

(A) 12 (B) 16 (C) 18 (D) 24 (E) 64

2. Sans réponse préformulée — Que vaut a si $2^a \cdot 5^{a+3} = 125\,000$?

3. Dans une école, 25 % des filles et 50 % des garçons assistent à un match de football. Si 48 % des élèves de l'école sont des filles, quel est le pourcentage des élèves qui assistent au match ?

(A) 28 % (B) 30 % (C) 32 % (D) 38 % (E) 40 %

4. Que vaut $\left(2019 + \frac{1}{2019}\right)^2 - \left(2019 - \frac{1}{2019}\right)^2$?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 4 (E) 12

5. Gaspard le cafard se déplace uniquement sur les lignes d'un quadrillage dont les carrés ont un côté de longueur 1. Si Gaspard se trouve sur un croisement du quadrillage, combien de croisements sont pour lui à distance 3 ?

(A) 4 (B) 9 (C) 10 (D) 12 (E) Une autre réponse

6. Un quart de cercle de rayon 4 et de centre B et un quart de cercle de rayon 3 et de centre D sont construits à l'intérieur du rectangle $ABCD$; le sommet C appartient au grand quart de cercle. Si les deux cercles sont tangents, que vaut $|AB|$?

(A) 5 (B) 6 (C) $\sqrt{26}$ (D) $3\sqrt{3}$ (E) $\sqrt{33}$



7. Sans réponse préformulée — Un instituteur divise l'ensemble de ses 27 élèves en deux sous-ensembles, puis il divise l'un des sous-ensembles restants en deux, puis il recommence avec un sous-ensemble tant que c'est possible. Après combien de divisions n'aura-t-il plus que des sous-ensembles tous formés d'un seul élève ?

8. Sans réponse préformulée — Un nombre premier p est sûr lorsque $\frac{1}{2}(p-1)$ est également premier. Quel est le 3^e nombre premier sûr ?

9. Que vaut $\sqrt{81 + \sqrt{361}}$?

(A) 10 (B) 27 (C) 43 (D) 100 (E) Une autre réponse

10. Quel est le plus grand entier par lequel l'expression $n^3 - n$ est toujours divisible, quel que soit le naturel n ?

(A) 2 (B) 3 (C) 8 (D) 12 (E) Un autre nombre

11. Sans réponse préformulée — La longueur d'un rectangle est diminuée de 4 cm et sa largeur augmentée de 3 cm : il devient ainsi un carré, et son aire reste inchangée. Que vaut le périmètre du rectangle initial ?

12. Sans réponse préformulée — Le liquide contenu dans un cylindre de rayon 2 cm et de hauteur 9 cm, entièrement rempli, est versé dans un second cylindre, de rayon 3 cm, sans le remplir. À quelle hauteur, en centimètres, montera le liquide dans le deuxième cylindre si celui-ci est posé sur une de ses bases ?

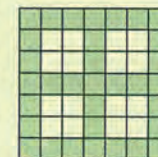
13. Si a et b sont des nombres naturels, parmi les affirmations suivantes, laquelle est toujours vraie ?

- (A) Si $a + b$ est un nombre premier, alors $a \cdot b$ est un nombre premier.
 (B) Si $a + b$ est un nombre pair, alors $a \cdot b$ est un nombre pair.
 (C) Si $a + b$ est un nombre pair, alors $a \cdot b$ est un nombre impair.
 (D) Si $a + b$ est un nombre impair, alors $a \cdot b$ est un nombre impair.
 (E) Si $a + b$ est un nombre impair, alors $a \cdot b$ est un nombre pair.

14. Le mille-pattes possède 1000 chaussettes. Il les a rangées dans un meuble à 3 tiroirs. Quel est le plus grand nombre de chaussettes que contient à coup sûr au moins un des tiroirs ?

- (A) 667 (B) 666 (C) 335 (D) 334 (E) 333

15. Sur la figure ci-contre, un grand carré est divisé en 7^2 petits carrés ; ceux du bord et des médianes sont grisés. Si la même règle avait été appliquée à un grand carré divisé en 101^2 petits carrés, combien de ceux-ci auraient été grisés ?



- (A) 595 (B) 597 (C) 601 (D) 602 (E) 603

16. Les angles consécutifs d'un quadrilatère (non croisé) ont comme amplitudes en degrés x , $2x$, $3x$ et $4x$, dans cet ordre.

- (A) Ce quadrilatère est un quadrilatère quelconque.
- (B) Ce quadrilatère est nécessairement un rectangle.
- (C) Ce quadrilatère est nécessairement un losange.
- (D) Ce quadrilatère est nécessairement un trapèze.
- (E) Un tel quadrilatère ne peut exister.

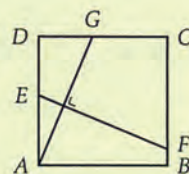
17. Six enfants : Aurore, Bilal, Cyril, Dana, Emma et Fred, ont des âges tous différents allant de 8 à 13 ans. Fred a deux ans de plus que Dana. Bilal a un an de moins qu'Emma et un an de plus que Fred. Cyril est le plus jeune. Quel âge a Aurore ?

- (A) 9 ans (B) 10 ans (C) 11 ans (D) 12 ans (E) 13 ans

18. *Sans réponse préformulée* — Si $f(x) = x^2 - 7x + k$ pour tout x et si $f(k) = -9$, que vaut $f(-1)$?

19. *Sans réponse préformulée* — Cinq nombres a , b , c , d et e sont tels que $a < b < c < d < e$. Les différentes sommes obtenues en les additionnant deux à deux sont 40, 54, 60, 61, 67, 76, 81, 82, 96 et 103. Que vaut la somme des cinq nombres ?

20. Le côté du carré $ABCD$ est 24. Le point E est situé sur le côté AD , le point F sur le côté BC et le point G sur le côté CD . Si $|DG| = 10$ et si EF est perpendiculaire à AG , quelle est la longueur de EF ?

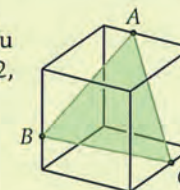


- (A) 24 (B) 26 (C) 28 (D) 30 (E) Aucune de ces réponses

21. Laquelle des égalités ci-dessous se déduit de $\left(1 + \frac{1}{a}\right)\left(1 - \frac{1}{b}\right) = 1$?

- (A) $b = a - 1$ (B) $b = a + 1$ (C) $b = 2a$ (D) $b = \sqrt{a^2 + 1}$
- (E) Aucune des précédentes

22. Les points A , B et C sont chacun au tiers d'une arête du cube représenté ci-contre. Si l'arête du cube vaut 12, quelle est l'aire du triangle ABC ?

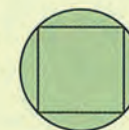


- (A) $24\sqrt{3}$ (D) $48\sqrt{2}$
- (B) $28\sqrt{3}$ (E) $56\sqrt{3}$
- (C) $48\sqrt{3}$

23. À laquelle des conditions suivantes équivaut l'inéquation $x(x - 1) > -x$?

- (A) $x \neq 0$ (B) $x > 0$ (C) $x \geq 0$ (D) $x = x$ (E) $x > 1$

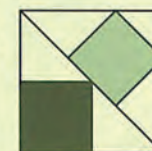
24. *Sans réponse préformulée* — L'aire du disque est de $18\pi \text{ cm}^2$; que mesure, en centimètres, le périmètre du carré inscrit ?



25. Que vaut $\frac{1 + 3 + 5 + \dots + 2019}{2 + 4 + 6 + \dots + 2018}$?

- (A) $\frac{2017}{2018}$ (B) $\frac{2018}{2020}$ (C) $\frac{1009}{2019}$ (D) $\frac{1010}{1009}$ (E) $\frac{1009}{2020}$

26. Des carrés noir et gris sont positionnés à l'intérieur d'un grand carré comme indiqué sur la figure. Quel est le rapport de l'aire du carré noir à celle du carré gris ?

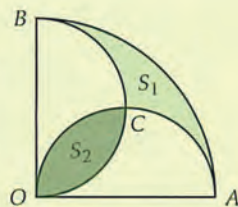


- (A) $\frac{3}{2}$ (B) $\frac{4}{3}$ (C) $\frac{8}{7}$ (D) $\frac{9}{8}$ (E) 1

27. Quel est le cinquième plus grand diviseur de 2015 000 000 ?

- (A) 201 500 (D) 201 500 000
- (B) 125 937 500 (E) 251 875 000
- (C) 155 000 000

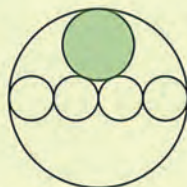
28. Les segments $[OA]$ et $[OB]$ sont perpendiculaires et de même longueur. Ces deux segments sont les diamètres de deux demi-cercles qui se recoupent en C . Le quart de cercle \widehat{AB} est centré en O . L'aire de la région colorée en gris clair est S_1 et celle de la région colorée en gris foncé est S_2 . Laquelle des affirmations suivantes est correcte ?



- (A) $S_1 < \frac{1}{\sqrt{2}}S_2$ (D) $S_2 < S_1 \leq \sqrt{2}S_2$
 (B) $\frac{1}{\sqrt{2}}S_2 \leq S_1 < S_2$ (E) $\sqrt{2}S_2 < S_1$
 (C) $S_1 = S_2$
29. Quelle est la négation logique de la phrase « *Tous les chats sont des animaux intelligents.* » ?

- (A) « *Il existe un animal intelligent qui n'est pas un chat.* »
 (B) « *Il existe un chat qui n'est pas un animal intelligent.* »
 (C) « *Certains chats ne sont pas des animaux, mais sont intelligents.* »
 (D) « *Aucun chat n'est un animal intelligent.* »
 (E) « *Tous les chats sont des animaux non intelligents.* »

30. Sur la figure ci-contre, quatre petits cercles de même rayon, tangents l'un à l'autre, sont disposés le long d'un diamètre du grand cercle. Le cercle grisé est tangent extérieurement à deux de ces petits cercles et intérieurement au grand cercle. Quel est le rapport du rayon du cercle grisé à celui des petits cercles ?



- (A) $8/5$ (B) $64/25$ (C) $3/2$ (D) $\pi/2$ (E) Une autre réponse