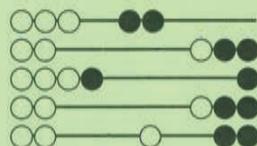




**OLYMPIADE
MATHÉMATIQUE BELGE**



Quarante-cinquième Olympiade Mathématique Belge
Organisée par la Société Belge des Professeurs de Mathématique
Midi éliminatoire 2020

INSTRUCTIONS

- N'ouvrez pas ce livret avant le signal de votre professeur.
- Vous indiquerez vos réponses au verso de cette page.
- Ce questionnaire contient 30 questions ; répondez à 5 questions au moins.
- Vingt-deux questions sont à choix multiple. Chacune est suivie de réponses désignées par (A), (B), (C), (D) et (E). Chaque question possède une seule réponse correcte. Décidez quelle est la réponse correcte parmi les cinq proposées et retenez la lettre majuscule correspondante. Sur la feuille réponse, écrivez cette lettre dans le cercle situé à droite du numéro de la question.
EXEMPLE : si vous estimez que la réponse correcte à la question numéro 17 est celle précédée de la lettre (D), vous écrirez D sur la feuille réponse, à droite du numéro 17, dans le cercle.
- Huit questions sont sans réponses préformulées. Dans ce cas, la réponse correcte est un nombre entier dans [0;999]. C'est ce nombre que vous écrirez dans la case rectangulaire de la feuille réponse.
- RÈGLES DE COTATION :** Vous recevez 5 points par réponse correcte, 2 points par abstention et 0 point par réponse fausse. Avec ce système, deviner fera en moyenne diminuer votre score. Vous n'avez intérêt à deviner que si vous avez au moins une chance sur deux de bien choisir.
- Reportez les réponses au fur et à mesure que vous les obtenez. Écrivez au crayon (si vous changez d'avis, gomez la réponse). Du papier de brouillon, du papier millimétré, une règle, un compas, une gomme peuvent être utilisés. Les calculatrices et règles à calcul ne sont pas autorisées, de même que les livres et les notes personnelles.
- Au signal de votre professeur, détachez la feuille de couverture sans déchirer le questionnaire, retournez-la, couvrez-en les questions, puis inscrivez les informations demandées.
- Quand votre professeur vous l'indiquera, commencez le travail sur les problèmes. Vous disposez de 90 minutes.

Mercredi 15 janvier 2020

À REMPLIR PAR L'ÉLÈVE (en majuscules)

Nom :

Prénom :

Classe :

Adresse privée

Rue et n° :

Code postal et localité :

École

Nom (sans abréviations) :

Adresse

Rue et n° :

Code postal et localité :

CADRE RÉSERVÉ AU PROFESSEUR

Chaque réponse correcte a une valeur de 5 points et chaque abstention a une valeur de 2 points ; rien n'est déduit pour une réponse fausse. Le score total est calculé en prenant 5 fois le nombre de réponses correctes et en ajoutant 2 fois le nombre d'abstentions.

Réponses correctes : × 5 =

Abstentions : × 2 =

Score total :

| | |
|----|-----------------------|
| 1 | <input type="radio"/> |
| 2 | <input type="radio"/> |
| 3 | <input type="radio"/> |
| 4 | <input type="radio"/> |
| 5 | <input type="radio"/> |
| 6 | <input type="text"/> |
| 7 | <input type="radio"/> |
| 8 | <input type="radio"/> |
| 9 | <input type="radio"/> |
| 10 | <input type="text"/> |
| 11 | <input type="text"/> |
| 12 | <input type="radio"/> |
| 13 | <input type="radio"/> |
| 14 | <input type="radio"/> |
| 15 | <input type="radio"/> |
| 16 | <input type="radio"/> |
| 17 | <input type="radio"/> |
| 18 | <input type="text"/> |
| 19 | <input type="text"/> |
| 20 | <input type="radio"/> |
| 21 | <input type="radio"/> |
| 22 | <input type="text"/> |
| 23 | <input type="radio"/> |
| 24 | <input type="text"/> |
| 25 | <input type="radio"/> |
| 26 | <input type="radio"/> |
| 27 | <input type="radio"/> |
| 28 | <input type="radio"/> |
| 29 | <input type="text"/> |
| 30 | <input type="radio"/> |

1. $101\,010 \times 73 =$

- (A) 7300 (D) 7373730
 (B) 737373 (E) 730730730
 (C) 7307300

2. Le long d'une route rectiligne, 19 poteaux d'éclairage sont tous situés du même côté de la route, et la distance entre deux poteaux successifs est de 9 mètres. Que vaut, en mètres, la distance entre le premier et le dernier poteau ?

- (A) 152 (B) 162 (C) 171 (D) 172 (E) Une autre réponse

3. Le côté du petit carré vaut le tiers du côté du carré moyen ; le côté du carré moyen vaut la moitié du côté du grand carré. Si l'aire du petit carré est 11 cm^2 , quelle est l'aire du grand carré, en centimètres carrés ?

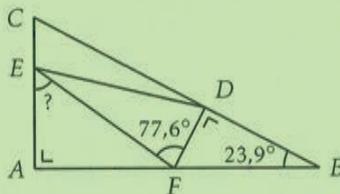


- (A) 66 (B) 121 (C) 396 (D) 4356 (E) Une autre réponse

4. Parmi les nombres suivants, lequel est le plus grand ?

- (A) $2 \times 3 \times 10^{34}$ (D) 10^{35}
 (B) $0,6 \times 10^{34}$ (E) 6000×10^{32}
 (C) $0,0006 \times 10^{36}$

5. D'après la figure (imprécise) ci-dessous, que vaut l'amplitude de l'angle \widehat{AEF} ?



- (A) $53,5^\circ$ (B) $53,57^\circ$ (C) $53,6^\circ$ (D) $53,7^\circ$ (E) $53,8^\circ$

6. *Sans réponse préformulée* — J'écris 3 à gauche d'un nombre à deux chiffres. Le double du nombre à trois chiffres ainsi obtenu est égal à 27 fois le nombre de départ. Combien vaut le nombre de départ ?

7. Carla achète deux pains par semaine, qu'elle envisage de couper à domicile avec une trancheuse à 100 €. Si sa boulangerie lui vend toujours le pain non coupé à 0,05 € de moins que le même pain coupé, au cours de quelle année Carla finira-t-elle de récupérer le prix d'achat de la trancheuse ?

- (A) Au cours de la 1^{re} année (D) Au cours de la 10^e année
 (B) Au cours de la 2^e année (E) Au cours de la 20^e année
 (C) Au cours de la 5^e année

8. Combien de diviseurs naturels le nombre 2020 admet-il ?

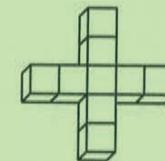
- (A) 2 (B) 4 (C) 8 (D) 10 (E) 12

9. Dans une élection où il n'y a que deux candidats, le vainqueur a 140 votes de plus que le perdant. Il a ainsi obtenu 60 % des votes exprimés. Combien y a-t-il de votants ?

- (A) 560 (B) 700 (C) 840 (D) 1400
 (E) Aucune de ces réponses

10. *Sans réponse préformulée* — Quel est le nombre entier le plus proche de $\sqrt{2020}$?

11. *Sans réponse préformulée* — Un solide en forme de croix est formé de 9 cubes identiques de 20 cm d'arête. Quelle est, en décimètres carrés, l'aire extérieure totale du solide ?



12. La somme de trois nombres premiers distincts est 40. Quelle est la différence entre les deux plus grands de ces trois nombres ?

- (A) 0 (B) 12 (C) 16 (D) 20 (E) 24

13. $|\sqrt{3} - \pi| + |\sqrt{3} - \sqrt{2}| + 4|\sqrt{36} - \sqrt{9}| - |\sqrt{2} - \pi| =$

- (A) $\pi - \sqrt{2}$ (B) $\pi + \sqrt{2}$ (C) 2π (D) $2\pi + \sqrt{2}$ (E) 12

14. Les questionnaires de l'Olympiade Mathématique Belge sont enfermés dans un coffre qui s'ouvre avec trois clés identiques, à introduire en même temps dans ses trois serrures. Six membres du jury possèdent chacun une clé valide :

- Pascal ne peut se libérer que le mardi et le jeudi ;
- Lise ne peut se libérer ni le lundi, ni le jeudi, ni le vendredi, mais bien les autres jours ;
- Michel n'est pas libre le lundi, le vendredi ni le samedi mais est libre les autres jours ;
- Jules est retenu par d'autres obligations le lundi, le mardi et le mercredi, mais pas les autres jours ;
- Andrée n'est libre que le lundi et le mardi ;
- Benoit peut être là uniquement le mardi.

Combien de jours par semaine le jury peut-il ouvrir le coffre ?

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

15. Pour des nombres naturels a, b, c , le nombre $2^a \times 4^b \times 8^c$ est un carré parfait si :

- (A) $a + b$ est pair ; (D) a est pair ;
 (B) $a + b$ est impair ; (E) a est impair et $b + c$ est pair.
 (C) $a + c$ est pair ;

16. Une personne choisit un nombre naturel à 10 chiffres et le garde secret. Nous lui demandons de l'élever au carré, puis de soustraire 9 du résultat, ensuite de diviser par le nombre initial moins 3, enfin de soustraire 4. Le résultat final :

- (A) Ne dépend pas du nombre initial ;
 (B) Vaut toujours le nombre initial moins 1 ;
 (C) Vaut toujours le nombre initial ;
 (D) Vaut toujours le nombre initial plus 1 ;
 (E) Vaut toujours le nombre initial plus 2.

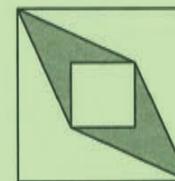
17. Ninon écrit les 26 lettres de l'alphabet les unes à la suite des autres puis recommence :

abcdefghijklmnopqrstuvwxyzabcdefghijklmnopqrstuvwxyz...

Si elle continue de la sorte, quelle est la 2020^e lettre qu'elle écrira ?

- (A) q (B) r (C) s (D) t (E) Une autre lettre

18. *Sans réponse préformulée* — Un carré de 3 cm de côté est centré dans un carré de 8 cm de côté ; leurs côtés sont parallèles deux à deux. Deux coins du petit carré sont reliés à deux coins du grand carré pour former la surface ombrée. Quelle est en centimètres carrés l'aire de cette surface ?



19. *Sans réponse préformulée* — Quel est le plus grand nombre naturel N tel que $\frac{N}{N+1} \leq \frac{2020}{2024}$?

20. Un rectangle de 10 sur 12 est inscrit à un demi-cercle ; le côté mesurant 12 est placé sur le diamètre. Quelle est l'aire du demi-disque ? La figure n'est pas à l'échelle.



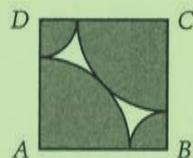
- (A) 13π (B) 49π (C) 68π (D) $169\pi/2$ (E) 136π

21. Hier, au moins une classe de mon école comptait strictement plus de 15 filles. Aujourd'hui, ce n'est plus vrai. Alors certainement, aujourd'hui :

- (A) Il y a une classe comptant 15 filles ou plus ;
 (B) Chaque classe compte strictement moins de 15 filles ;
 (C) Chaque classe compte 15 filles ou moins ;
 (D) Il y a une classe avec strictement moins de 15 filles ;
 (E) Il y a une classe avec au moins 15 garçons.

22. *Sans réponse préformulée* — Le nombre naturel n est strictement compris entre 1 et 20. Anne additionne tous les nombres naturels de 1 à n compris et Benji additionne tous les nombres naturels de $n+1$ à 20 compris. Ils trouvent la même somme. Que vaut n ?

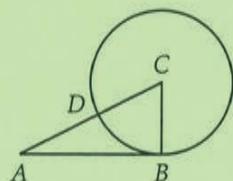
23. À l'intérieur du carré $ABCD$ de côté 1, il y a quatre quarts de disque, deux grands et deux petits. Chaque petit quart de disque est tangent aux deux grands et les deux grands quarts de disque sont tangents entre eux. Que vaut l'aire de la surface ombrée ?



- (A) $\frac{\pi}{4}$ (B) $\frac{(\sqrt{2}-1)\pi}{2}$ (C) $\frac{(\sqrt{2}+1)\pi}{8}$ (D) $\frac{(2-\sqrt{2})\pi}{2}$ (E) $\frac{\sqrt{2}\pi}{4}$

24. *Sans réponse préformulée* — Un certain type de pierres précieuses ont une valeur proportionnelle au carré de leur poids. Un bijoutier achète une telle pierre pour 1800 €. Malheureusement, la pierre est ensuite brisée en deux morceaux dont le rapport des poids est de 1 à 2. Quelle est la perte financière du bijoutier en euros ?

25. Dans la figure, le cercle de centre C et de rayon 1 est tangent à la droite AB et coupe le segment $[AC]$ en D . De plus, $|AB| = 2|BC|$. Alors $|AD| =$

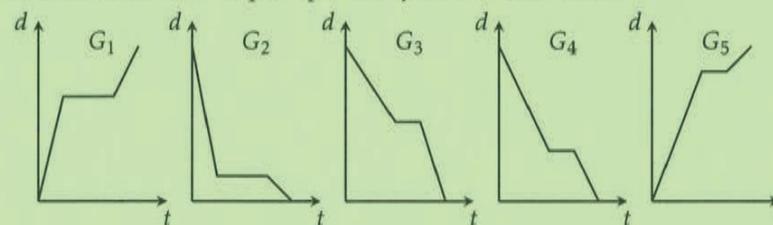


- (A) $\sqrt{5} - 1$
 (B) $\sqrt{5} + 1$
 (C) $1/2$
 (D) $1,5$
 (E) N'est pas déterminé par les données.

26. Mathilde est accro à un jeu qu'elle a installé sur son téléphone. À ce jour, elle a gagné 2400 des 3639 parties qu'elle a jouées. Cela, parce qu'elle a maintenant compris un truc grâce auquel elle n'en perd plus une seule. Combien de parties doit-elle encore jouer (et gagner) pour que son taux de réussite atteigne $2/3$?

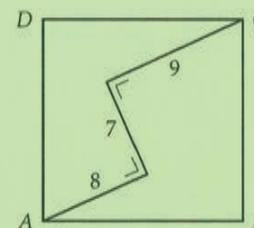
- (A) 39 (B) 40 (C) 77 (D) 78 (E) 79

27. Une cycliste rejoint sa maison en s'octroyant une courte halte. Après celle-ci, elle augmente sensiblement sa vitesse. Quel graphique pourrait représenter cette situation ? En abscisse est indiqué le temps t et en ordonnée, la distance d qui sépare la cycliste de sa maison.



- (A) G_1 (B) G_2 (C) G_3 (D) G_4 (E) G_5

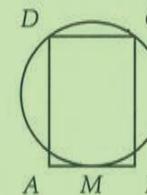
28. Quelle est la longueur du côté du carré $ABCD$?



- (A) 13 (B) 14 (C) $\sqrt{97}$ (D) $\sqrt{194}$ (E) $\sqrt{338}$

29. *Sans réponse préformulée* — Combien existe-t-il de triplets (x, y, z) d'entiers consécutifs tels que $x < y < z$ et $xyz = x + y + z$?

30. Le segment $[AB]$ est tangent en son milieu M à un cercle. Les perpendiculaires à AB en A et B coupent le cercle en D et C , comme sur la figure ci-contre. Quel doit être le rapport de la longueur du segment $[AB]$ au rayon du cercle pour que $ABCD$ soit un carré ?



- (A) $4/5$ (B) 1 (C) $\sqrt{2}$ (D) $8/5$ (E) 2