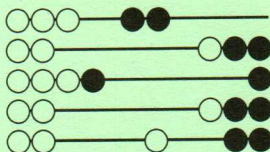




**OLYMPIADE  
MATHÉMATIQUE BELGE**



## **Quarante-sixième Olympiade Mathématique Belge**

*Organisée par la Société Belge des Professeurs de Mathématique*

### **Midi éliminatoire 2021**

#### INSTRUCTIONS

1. N'ouvrez pas ce livret avant le signal de votre professeur.
2. Vous indiquerez vos réponses au verso de cette page.
3. Ce questionnaire contient 30 questions ; répondez à 5 questions au moins.
4. Vingt-deux questions sont à choix multiple. Chacune est suivie de réponses désignées par **(A)**, **(B)**, **(C)**, **(D)** et **(E)**. Chaque question possède une seule réponse correcte. Décidez quelle est la réponse correcte parmi les cinq proposées et retenir la lettre majuscule correspondante. Sur la feuille réponse, écrivez cette lettre dans le cercle situé à droite du numéro de la question.  
EXEMPLE : si vous estimez que la réponse correcte à la question numéro 17 est celle précédée de la lettre **(D)**, vous écrirez D sur la feuille réponse, à droite du numéro 17, dans le cercle.
5. Huit questions sont sans réponses préformulées. Dans ce cas, la réponse correcte est un nombre entier dans  $[0; 999]$ . C'est ce nombre que vous écrirez dans la case rectangulaire de la feuille réponse.
6. **RÈGLES DE COTATION** : Vous recevez 5 points par réponse correcte, 2 points par abstention et 0 point par réponse fausse. Avec ce système, deviner fera en moyenne diminuer votre score. Vous n'avez intérêt à deviner que si vous avez au moins une chance sur deux de bien choisir.
7. Reportez les réponses au fur et à mesure que vous les obtenez. Écrivez au crayon (si vous changez d'avis, gomez la réponse). Du papier de brouillon, du papier millimétré, une règle, un compas, une gomme peuvent être utilisés. Les calculatrices et règles à calcul ne sont pas autorisées, de même que les livres et les notes personnelles.
8. Au signal de votre professeur, détachez la feuille de couverture sans déchirer le questionnaire, retournez-la, couvrez-en les questions, puis inscrivez les informations demandées.
9. Quand votre professeur vous l'indiquera, commencez le travail sur les problèmes. Vous disposez de 90 minutes.

**Mercredi 13 janvier 2021**

**À REMPLIR PAR L'ÉLÈVE (en majuscules)**

Nom :

Prénom :

Classe :

Adresse privée

Rue et n° :

Code postal et localité :

École

Nom (sans abréviations) :

Adresse

Rue et n° :

Code postal et localité :

**CADRE RÉSERVÉ AU PROFESSEUR**

Chaque réponse correcte a une valeur de 5 points et chaque abstention a une valeur de 2 points ; rien n'est déduit pour une réponse fausse. Le score total est calculé en prenant 5 fois le nombre de réponses correctes et en ajoutant 2 fois le nombre d'abstentions.

Réponses correctes :  × 5 =

+

Abstentions :  × 2 =

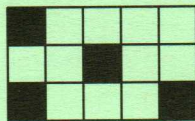
Score total :

- 1
- 2
- 3
- 4
- 5
- 6
- 7
- 8
- 9
- 10
- 11
- 12
- 13
- 14
- 15
- 16
- 17
- 18
- 19
- 20
- 21
- 22
- 23
- 24
- 25
- 26
- 27
- 28
- 29
- 30

1.  $3 =$

- (A)  $\frac{1}{3} + \frac{1}{9}$       (B)  $\frac{1}{3} - \frac{1}{9}$       (C)  $\frac{1}{3} \times \frac{1}{9}$       (D)  $\frac{1}{3} : \frac{1}{9}$   
(E) Aucune de ces expressions

2. Pauline a dessiné la grille rectangulaire ci-contre, qui est divisée en 15 cases de même grandeur. Combien de carrés de 4 cases contiennent une case noire ?

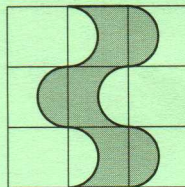


- (A) 4      (B) 5      (C) 6      (D) 7      (E) 8

3. Le cube de  $3^3$  est :

- (A)  $3^4$       (B)  $3^6$       (C)  $3^9$       (D)  $3^{27}$       (E)  $9^9$

4. Dans la figure ci-contre, le côté de chacun des petits carrés vaut 1 et les arcs de cercles sont des demi-cercles. Que vaut l'aire de la surface ombrée ?

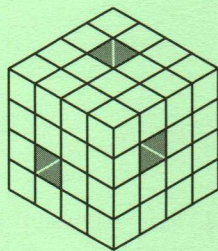


- (A)  $3\pi - 6$       (B)  $\pi$       (C)  $9 - 2\pi$       (D)  $6 - \pi$       (E) 3

5. Si  $p$  et  $q$  sont deux nombres naturels quelconques, alors obligatoirement :

- (A)  $p \cdot q$  est premier ;      (D)  $p + q$  est premier ;  
(B)  $p \cdot q$  n'est pas premier ;      (E)  $p^q$  est premier.  
(C)  $p - q$  est premier ;

6. Ce grand cube était formé de 64 petits cubes identiques. Trois tunnels rectilignes ont été creusés, qui le traversent de part en part. Les zones ombrées sur la figure représentent leurs extrémités. Combien reste-t-il de petits cubes ?



- (A) 51      (B) 52      (C) 53      (D) 54  
(E) Une autre réponse

7. De quel pourcentage faut-il augmenter la longueur d'un rectangle pour que son aire soit augmentée de 64 %, la largeur restant constante ?

- (A) 4 %      (B) 8 %      (C) 16 %      (D) 32 %      (E) 64 %

8. Considérons les points de coordonnées  $A = (0;1)$ ,  $B = (2;3)$  et  $C = (1;1)$  dans un repère orthonormé d'origine  $O$ .

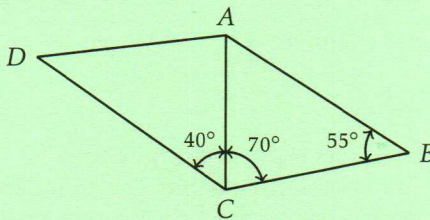
- (A) Les droites  $AB$  et  $OC$  sont confondues.
- (B) Les droites  $AB$  et  $OC$  sont perpendiculaires.
- (C) Les droites  $AB$  et  $OC$  sont sécantes avec un angle de  $30^\circ$ .
- (D) Les droites  $AB$  et  $OC$  sont sécantes avec un angle de  $45^\circ$ .
- (E) Les droites  $AB$  et  $OC$  sont parallèles distinctes.

9. *Sans réponse préformulée* — Mon perroquet affirme que mon âge est le tiers du sien. Ce curieux volatile a 30 ans de plus que moi. Quel est donc son âge, en années ?

10. Le numérateur d'une première fraction est le triple du dénominateur d'une seconde fraction. Le dénominateur de la première est le quadruple du numérateur de la seconde. Quel est le produit de ces deux fractions ?

- (A)  $\frac{4}{3}$
- (B)  $\frac{3}{4}$
- (C) 1
- (D) 12
- (E)  $\frac{1}{12}$

11. Dans cette figure (imprécise),  $|AD| = |BC|$ . Quelle est l'amplitude de l'angle  $\widehat{DAC}$  ?



- (A)  $70^\circ$
- (B)  $95^\circ$
- (C)  $100^\circ$
- (D)  $110^\circ$
- (E)  $125^\circ$

12. *Sans réponse préformulée* — Deux nombres entiers  $a$  et  $b$  sont tels que  $a > b \geq 0$ . Leur différence est 20 et la différence de leurs carrés est 1400. Que vaut  $a$  ?

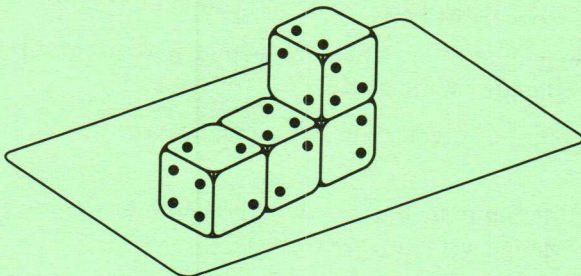
13. Que vaut la différence entre 70 % de 30 et 30 % de 70 ?

- (A) -30
- (B) 0
- (C) 30
- (D) 40
- (E) 100

14. *Sans réponse préformulée* — Voici les six faces d'un dé particulier :



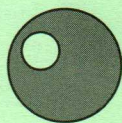
Sur une table sont assemblés 4 dés identiques, comme sur la figure ci-dessous. Quel est le nombre de points en contact avec la table ?



15. *Sans réponse préformulée* — Fanny, Gus, Haruki et Inès ont chacun 200 €. Fanny donne 20 € à chacun des autres. Gus donne 25 € à chacun des autres. Haruki donne 30 € à chacun des autres. Inès donne 35 € à chacun des autres. Quelle sera alors la différence entre les avoirs de Fanny et d'Inès, en euros ?

16. Soit  $R$  le rayon du grand cercle et  $r$  celui du petit cercle dans la figure ci-contre. Sachant que  $R - r = 5$  et  $R + r = 10$ , que vaut l'aire de la partie ombrée ?

- (A)  $5\pi$    (B)  $10\pi$    (C)  $15\pi$    (D)  $25\pi$    (E)  $50\pi$



17. Laquelle de ces équations *n'*admet *pas*  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  comme solution ?

- (A)  $2x = \sqrt{2}$    (B)  $x^2 = \frac{1}{2}$    (C)  $\sqrt{2}x = 1$    (D)  $\sqrt{1 - 2x^2} = 0$   
 (E)  $\frac{1}{2}x^4 = \frac{1}{8}x^2$

18.  $2022 - 2019 + 2020 - 2017 + 2018 - 2015 + 2016 - \dots + 6 - 3 + 4 - 1 =$

- (A) 2021   (B) 3027   (C) 3030   (D) 3033   (E) 6066

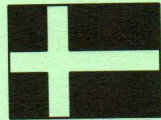
19. *Sans réponse préformulée* — Que vaut  $\sqrt{2021^2 - 2019 \times 2023}$  ?

20. Laquelle des affirmations suivantes à propos d'un triangle quelconque est fausse ?

- (A) Si le point d'intersection des hauteurs est extérieur au triangle, alors le point d'intersection des médiatrices est extérieur au triangle.
- (B) Si le point d'intersection des hauteurs est sur un côté du triangle, alors il est également sur un second côté du triangle.
- (C) Si le point d'intersection des médiatrices est sur un côté du triangle, alors le triangle est rectangle.
- (D) Le point d'intersection des médianes n'est jamais extérieur au triangle.
- (E) Si une hauteur, une médiatrice et une médiane sont confondues, alors le triangle est équilatéral.

21. *Sans réponse préformulée* — La droite passant par les points (15;25) et (24;40) passe par (k;135). Que vaut k ?

22. Ce drapeau est un rectangle de longueur 1,6 m et de largeur 1 m composé d'une croix blanche sur fond noir. L'aire de la croix blanche est égale aux  $\frac{3}{10}$  de l'aire totale du drapeau. Les deux bandes blanches qui se croisent ont la même largeur. Quelle est, en millimètres, la largeur de chacune de ces bandes blanches ?



- (A)  $\frac{2400}{13}$
- (B) 200
- (C) 2400
- (D)  $1300 - 100\sqrt{217}$
- (E) Une autre réponse

23. *Sans réponse préformulée* — Le côté d'un losange mesure 10 cm. Les longueurs de ses diagonales diffèrent de 2 cm. Que vaut son aire, en centimètres carrés ?

24. Deux filles et trois garçons s'assoient les uns à côté des autres, chacun occupant une place au hasard sur un banc public. Combien de chances y a-t-il que les deux filles se retrouvent côte à côte ?

- (A) 1 chance sur 5
- (B) 2 chances sur 5
- (C) 3 chances sur 5
- (D) 4 chances sur 5
- (E) 5 chances sur 5

25. Lefort effectue une montée de 2700 m de long en 31 minutes, une partie à pied à la vitesse de 2 km/h, le reste en vélo à 12 km/h. Combien de temps, en minutes, marche-t-il ?

- (A) 17      (B) 19      (C) 21      (D) 23      (E) 25

26. Les arêtes d'un grand cube mesurent  $a$  cm, avec  $a$  entier et  $a > 2$ . Toutes les faces de ce cube sont entièrement peintes puis ce cube est soigneusement découpé en  $a^3$  petits cubes dont les arêtes mesurent 1 cm. Il y a 6 fois plus de petits cubes peints sur une face que de petits cubes peints sur deux faces. Que vaut  $a$  ?

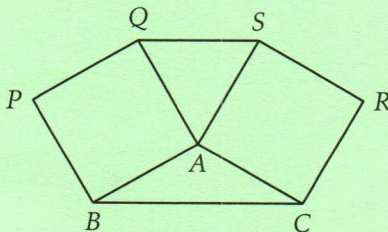
- (A) 6      (B) 8      (C) 10      (D) 12      (E) 14

27. *Sans réponse préformulée* — La somme des longueurs des trois côtés d'un triangle rectangle vaut 18 tandis que la somme de leurs carrés vaut 128. Quelle est l'aire de ce triangle ?

28. Dans une course, il y a 20 participants de 12 ans, 15 participants de 15 ans et 30 participants de 18 ans. Le temps moyen de tous les participants est 50 min. Si le temps moyen des participants de 12 ans est 60 min et celui des participants de 15 ans, 48 min, quel est le temps moyen des participants de 18 ans ?

- (A) 42 min 50 s      (D) 44 min 20 s  
 (B) 43 min 30 s      (E) 44 min 45 s  
 (C) 43 min 40 s

29. Dans cette figure,  $AQPB$  et  $ASRC$  sont des carrés et  $AQS$  est un triangle équilatéral. Si  $|QS| = 4$ , que vaut  $|BC|$  ?



- (A) 8      (B)  $4\sqrt{3}$       (C) 16      (D)  $6\sqrt{2}$       (E) Une autre valeur

30. Quels que soient  $a \geq b \geq 0$ , nécessairement  $\sqrt{a} - \sqrt{b} =$

(A)  $\sqrt{a-b}$

(B)  $\sqrt{a+b}$

(C)  $\sqrt{a+b+2\sqrt{ab}}$

(D)  $\sqrt{a+b-2\sqrt{ab}}$

(E) Aucune de ces réponses