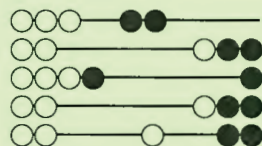




**OLYMPIADE
MATHÉMATIQUE BELGE**



Quarante-huitième Olympiade Mathématique Belge

Organisée par la Société Belge des Professeurs de Mathématique

Midi éliminatoire 2023

INSTRUCTIONS

- N'ouvrez pas ce livret avant le signal de votre professeur.
- Vous indiquerez vos réponses au verso de cette page.
- Ce questionnaire contient 30 questions ; répondez à 5 questions au moins.
- Vingt-deux questions sont à choix multiple. Chacune est suivie de réponses désignées par (A), (B), (C), (D) et (E). Chaque question possède une seule réponse correcte. Décidez quelle est la réponse correcte parmi les cinq proposées et retenez la lettre majuscule correspondante. Sur la feuille réponse, écrivez cette lettre dans le cercle situé à droite du numéro de la question.
EXEMPLE : si vous estimez que la réponse correcte à la question numéro 17 est celle précédée de la lettre (D), vous écrirez D sur la feuille réponse, à droite du numéro 17, dans le cercle.
- Huit questions sont sans réponses préformulées. Dans ce cas, la réponse correcte est un nombre entier dans [0;999]. C'est ce nombre que vous écrirez dans la case rectangulaire de la feuille réponse.
- RÈGLES DE COTATION : Vous recevez 5 points par réponse correcte, 2 points par abstention et 0 point par réponse fausse. Avec ce système, deviner fera en moyenne diminuer votre score. Vous n'avez intérêt à deviner que si vous avez au moins une chance sur deux de bien choisir.
- Reportez les réponses au fur et à mesure que vous les obtenez. Écrivez au crayon (si vous changez d'avis, gomez la réponse). Du papier de brouillon, du papier millimétré, une règle, un compas, une gomme peuvent être utilisés. Les calculatrices et règles à calcul ne sont pas autorisées, de même que les livres et les notes personnelles.
- Au signal de votre professeur, détachez la feuille de couverture sans déchirer le questionnaire, retournez-la, couvrez-en les questions, puis inscrivez les informations demandées.
- Quand votre professeur vous l'indiquera, commencez le travail sur les problèmes. Vous disposez de 90 minutes.

Mercredi 18 janvier 2023

À REMPLIR PAR L'ÉLÈVE (en majuscules)

Nom :

Prénom :

Classe :

Adresse privée

Rue et n° :

Code postal et localité :

École

Nom (sans abréviations) :

Adresse

Rue et n° :

Code postal et localité :

CADRE RÉSERVÉ AU PROFESSEUR

Chaque réponse correcte a une valeur de 5 points et chaque abstention a une valeur de 2 points ; rien n'est déduit pour une réponse fausse. Le score total est calculé en prenant 5 fois le nombre de réponses correctes et en ajoutant 2 fois le nombre d'abstentions.

Réponses correctes :

	× 5 =	
--	-------	--

+

Abstentions :

	× 2 =	
--	-------	--

Score total :

--

1	<input type="radio"/>
2	<input type="radio"/>
3	<input type="radio"/>
4	<input style="width: 40px; height: 20px;" type="text"/>
5	<input type="radio"/>
6	<input type="radio"/>
7	<input type="radio"/>
8	<input type="radio"/>
9	<input type="radio"/>
10	<input type="radio"/>
11	<input type="radio"/>
12	<input type="radio"/>
13	<input style="width: 40px; height: 20px;" type="text"/>
14	<input style="width: 40px; height: 20px;" type="text"/>
15	<input style="width: 40px; height: 20px;" type="text"/>
16	<input type="radio"/>
17	<input type="radio"/>
18	<input style="width: 40px; height: 20px;" type="text"/>
19	<input type="radio"/>
20	<input type="radio"/>
21	<input type="radio"/>
22	<input type="radio"/>
23	<input type="radio"/>
24	<input type="radio"/>
25	<input type="radio"/>
26	<input type="radio"/>
27	<input style="width: 40px; height: 20px;" type="text"/>
28	<input type="radio"/>
29	<input style="width: 40px; height: 20px;" type="text"/>
30	<input style="width: 40px; height: 20px;" type="text"/>

1. $\frac{31^2 + 31}{31} =$
 (A) 32 (B) 33 (C) 35 (D) 37 (E) 63

2. Mathilde dépose sur une balance son sac de trekking rempli de son matériel. La balance affiche 10 kg. Mathilde vide alors le sac et le remet sur la balance. Elle découvre que le sac vide représente 8 kg de moins que le matériel qu'il contenait. Combien de kilos la balance affiche-t-elle pour le sac vide?

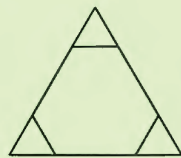
- (A) 0,5 (B) 1 (C) 1,5 (D) 2 (E) 2,5

3. $2023 \times 2022 - 2024 \times 2021 =$
 (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 4 (E) 2002

4. *Sans réponse préformulée* — Pour assister à un match de football, un groupe de 21 personnes a payé 360 € de plus qu'un groupe de 12 personnes. Sachant que toutes les places sont au même prix, quel est le prix d'une place, en euros?

5. Si $\frac{a}{b} = \frac{4}{7}$ et $\frac{b}{c} = \frac{7}{2}$, alors $\frac{a}{c} - \frac{c}{a} =$
 (A) 0 (B) $\frac{8}{49}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) $\frac{3}{2}$ (E) $\frac{49}{8}$

6. Trois petits triangles équilatéraux isométriques sont découpés dans les coins d'un triangle équilatéral de 12 cm de côté, comme sur la figure imprécise ci-contre. La somme des périmètres des trois petits triangles est égale au périmètre de l'hexagone ombré. Quelle est la longueur du côté des petits triangles?



- (A) 1 cm (B) 2 cm (C) $\frac{8}{3}$ cm (D) 3 cm (E) 4 cm

7. Lorsque je regarde un angle de 18° à la loupe de grossissement 2, je vois un angle de

- (A) 9° (B) $(9\sqrt{2})^\circ$ (C) 18° (D) $(18\sqrt{2})^\circ$ (E) 36°

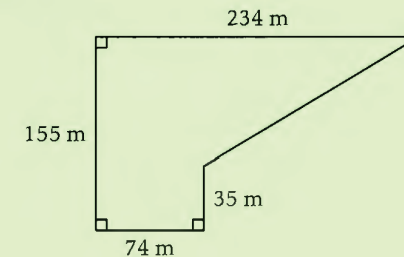
8. Dans mon école, les classes sont composées d'au maximum 30 élèves. Dans ma classe, lorsque la professeure nous demande de faire un travail par deux, un élève se retrouve seul. Si le travail se fait par groupes de trois, deux élèves se retrouvent seuls. Si le travail se fait par groupes de cinq, quatre élèves se retrouvent seuls. Combien d'élèves se retrouvent seuls si le travail se fait par groupes de quatre?

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

9. Si l'aire d'un disque est $1/\pi$, quel est son diamètre?

- (A) $1/\pi$ (B) $2/\pi$ (C) 2 (D) π (E) 2π

10. Voici le parcours du cross de l'école. Sa représentation ci-dessous n'est pas à l'échelle. Vous devez effectuer un tour complet. Quelle sera la longueur de votre course?



- (A) 636 m (B) 652 m (C) 666 m (D) 682 m (E) 698 m

11. Si $p = 1 + 2 + \dots + 99$ et $q = 1 + 2 + \dots + 100$, alors que vaut la racine carrée de $p + q$?

- (A) 100 (B) 101 (C) 200 (D) 201 (E) 400

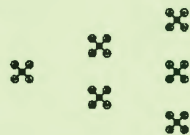
12. Les nombres 2×10^{2022} et 5×10^{-2023}

- (A) Sont opposés l'un à l'autre; (D) Ont pour produit 0,1;
 (B) Sont inverses l'un de l'autre; (E) Ont pour produit 10.
 (C) Ont pour produit 0,01;

13. *Sans réponse préformulée* — Quelle somme d'argent en euros, placée un an à 6%, rapporte les mêmes intérêts qu'une somme de 240 € placée un an à 5%? (Les pourcentages donnés sont des taux d'intérêt annuels.)

14. *Sans réponse préformulée* — Quel est le plus petit nombre naturel à deux chiffres qui soit égal au produit de ses chiffres augmenté de leur somme ?

15. *Sans réponse préformulée* — Des drones volent en formation triangulaire telle que le 1^{er} drone est suivi de 2 drones qui sont suivis de 3 drones, etc. Vous voyez passer une formation de 6 drones puis une deuxième formation qui rejoint la première et fusionne avec elle pour constituer une formation complète. Combien de drones se trouvent ainsi réunis ?



16. Le triangle ABC est rectangle en C . Si $|BC| = 2^{22}$ et $|AC| = 3 \times 2^{20}$, quelle est la longueur du segment $[AB]$?

- (A) 5×2^{20} (B) 3×2^{42} (C) 25×2^{40} (D) 6^{42}
 (E) Une autre valeur

17. Chez une brocanteuse, 2023 assiettes identiques sont réparties en 7 piles de hauteurs toutes différentes les unes des autres. Un restaurateur achète la plus haute pile. Quel est le nombre minimum d'assiettes qu'il emporte ?

- (A) 202 (B) 286 (C) 289 (D) 292 (E) 302

18. *Sans réponse préformulée* — Phil joue à un jeu dont les règles sont les suivantes :

- il démarre le jeu avec zéro point ;
- s'il gagne une manche, il reçoit 3 points ;
- s'il perd une manche, il doit rendre 4 points ;
- il peut avoir un nombre négatif de points ;
- il n'y a pas de manche nulle.

Après 20 manches, Phil possède 11 points. Combien de manches a-t-il perdues ?

19. Combien existe-t-il de couples (x, y) d'entiers tels que $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{3}$?

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

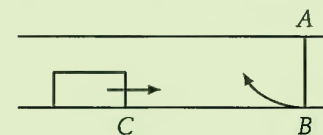
20. Pour laquelle des valeurs de n ci-dessous le nombre $n^2 + (n+2)^2 + (n+4)^2$ est-il multiple de 10 ?

- (A) 2022 (B) 2023 (C) 2024 (D) 2025 (E) 2026

21. Combien de nombres entiers compris entre 1000 et 2000 ont leurs chiffres ordonnés par ordre strictement croissant ? Par exemple, 1689 est un tel nombre car $1 < 6 < 8 < 9$.

- (A) 56 (B) 120 (C) 180 (D) 216 (E) 516

22. Vous glissez une table large de 1 m le long de la paroi rectiligne d'un couloir large de 2 m, comme sur la figure ci-dessous. Jusqu'à quelle distance de B , en mètres, pouvez-vous amener le coin C de la table, pour pouvoir encore ouvrir totalement la porte $[AB]$?



- (A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (B) $\sqrt{2}$ (C) $\sqrt{3}$ (D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (E) 2

23. Un trapèze convexe a trois côtés de même longueur 26 et son quatrième côté mesure 6. Que mesure sa hauteur ?

- (A) 20 (B) 21 (C) 22 (D) 23 (E) 24

24. Dans une boîte se trouvent 119 boules rouges et 247 boules bleues. Les 366 boules sont rangées dans 122 sacs contenant chacun 3 boules. Exactement 21 sacs contiennent 3 boules rouges et exactement 12 sacs contiennent 2 boules rouges et 1 boule bleue. Combien de sacs ne contiennent aucune boule rouge ?

- (A) 54 (B) 55 (C) 56 (D) 57 (E) 58

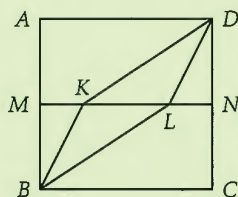
25. Lors du lancer de deux dés à six faces non truqués, quelles sont les chances que ces deux dés affichent la même valeur ?

- (A) Une chance sur deux (D) Une chance sur douze
 (B) Une chance sur trois (E) Une chance sur trente-six
 (C) Une chance sur six

26. Sur la figure ci-contre, chacun des arcs de cercle relie deux sommets d'un triangle équilatéral de côté 1 et a pour centre le troisième sommet. Quel est le périmètre de la figure ?



- (A) π (B) 2π (C) $2\sqrt{2}$ (D) $2\sqrt{3}$
 (E) Une autre réponse
27. *Sans réponse préformulée* — Combien existe-t-il de nombres naturels à 3 chiffres tous différents et choisis parmi les chiffres 1, 2, 3, 4, 5 ?
28. Je trace un segment de 5 cm. Je trace ensuite la courbe constituée des points situés à 2 cm de ce segment. Quelle est, en centimètres carrés, l'aire de la surface délimitée par cette courbe ?
- (A) $2 \times (5 + 2\pi)$ (D) $4 \times (5 + \pi)$
 (B) $2 \times (5 + 8\pi)$ (E) $4 \times (5 + 4\pi)$
 (C) $2 \times (10 + \pi)$
29. *Sans réponse préformulée* — Dans la figure imprécise ci-dessous, le carré $ABCD$ est de côté 120. Les points K et L sur sa médiane $[MN]$ sont tels que $|MK| = |LN|$. Que vaut $|MK|$ si l'aire de $BLDK$ est égale à $1/5$ de l'aire du carré ?



30. *Sans réponse préformulée* — Quel est le quotient par 75 du plus grand nombre de la forme $abca$ divisible par 75 ?